BAB VI

TRANSFORMASI LAPLACE

Kompetensi

Mahasiswa mampu

1. Menentukan nilai transformasi Laplace untuk fungsi-fungsi yang sederhana
2. Menggunakan sifat-sifat transformasi untuk menentukan nilai transformasi Laplace untuk fuyngsi-fungsi yang lebih kompleks
3. Menggunakan rumus-rumus transformasi turunan dan integral
4. Menggunakan teorema pergeseran sumbu-s dan sumbu-t
5. Menentukan turunan dan integral transformasi Laplace F(s) untuk memperoleh fungsi aslinya yang bersesuaian dengan turunan dan integral tersebut.

Materi

1. Pengertian Transformasi Laplace
2. Keujudan Transformasi Laplace
3. Tansformasi Laplace Turunan
4. Transformasi Laplace Integral
5. Pergeseran pada Sumbu s
6. Pergeseran pada Sumbu t
7. Turunan Transformasi Laplace

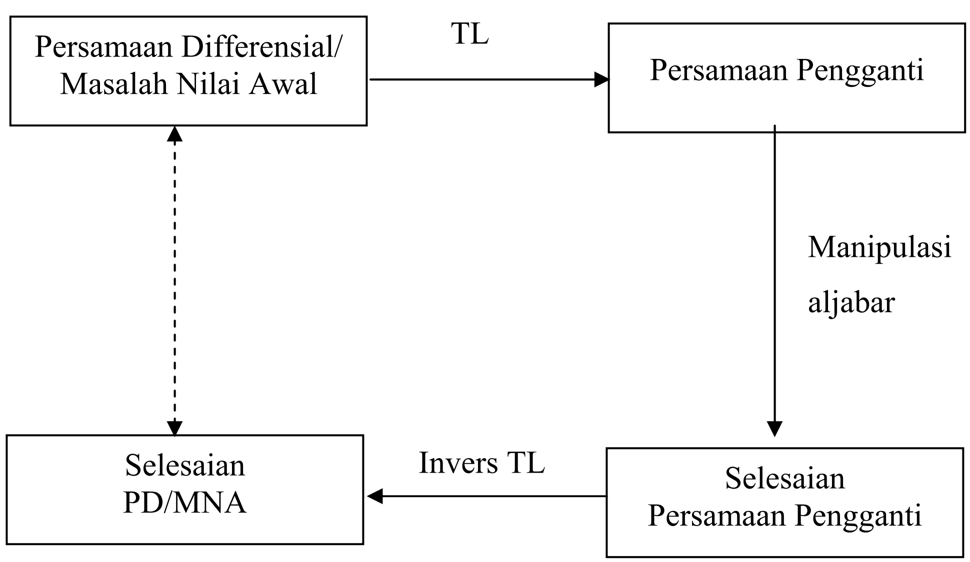
BAB VI

TRANSFORMASI LAPLACE

Transformasi Laplace merupakan salah satu metode yang digunakan untuk menyelesaikan suatu persamaan diferensial dan masalah nilai awal. Prosedur utama dalam penyelesaiannya adalah:

1. Mentransformasi (Laplace) persamaan yang sulit menjadi persamaan yang lebih sederhana yang disebut *persamaan pengganti*.
2. Menyelesaikan persamaan pengganti dengan manipulasi aljabar biasa.
3. Mentransformasi kembali (invers Laplace) selesaian dari persamaan pengganti untuk mendapatkan selesaian dari persamaan semula.

Prosedur tersebut dapat digambarkan dalam bagan berikut:



Gambar Proses penyelesaian persamaan differensial atau masalah nilai awal dengan menggunakan Transformasi Laplace.

6.1. Pengertian Transformasi Laplace

Definisi 1. Misal f(t) terdefinisikan untuk $t \geq 0$. Dibentuk fungsi F dengan

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt\,.$$

Jika F(s) ada maka F(s) disebut transformasi Laplace dari f(t) dan dinotasikan dengan $L(f)$. Dalam hal ini f(t) disebut transformasi invers dari F(s) dan dinotasikan dengan $L^{-1}(F)$. Jadi,

$$F(s) = L(f) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

$$f(t) = L^{-1}(F).$$

Contoh 1:

1. $f(t)=1$, $t \geq 0$, maka

$$L(f) = \int_0^\infty e^{-st}\,dt = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^\infty = \frac{1}{s}.$$

   Jadi

   $L(1) = 1/s$ dan

   $L^{-1}(1/s) = 1$.

2. $f(t) = e^{at}$, $t \geq 0$, maka

3. $L(f) = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}\,dt = \left[-\frac{1}{s-a}e^{-(s-a)t}\right]_0^\infty = \frac{1}{s-a}$, untuk $s-a>0$.

Jadi

$L(e^{at}) = 1/(s\text{-}a)$ dan

$L^{-1}(1/(s\text{-}a)) = e^{at}$.

Teorema 1. (Sifat Linier):

Jika

$$L(f(t)) \text{ dan } L(g(t))$$

ada dan a, b konstan maka

$$L\{af(t)+bg(t)\} = aL(f(t))+bL(g(t)).$$

Bukti: dari definisi Transformasi Laplace.

Contoh 2:

1. Tentukan L(cosh at).

Penyelesaian:

Karena cosh at = $(e^{at}+e^{-at})/2$, dengan sifat linier maka

$$L(\cosh at) = L\{(e^{at}+e^{-at})/2\}$$

$$= (1/2)L(e^{at}) + (1/2)L(e^{-at})$$

$$=(1/2)\,(1/(s-a))+ (1/2)\,(1/(s+a))$$

$$= s/(s^2-a^2), \text{ untuk } s>a\geq 0.$$

2. Jika $F(s) = \dfrac{1}{(s-a)(s-b)}$ dengan $a\neq b$, tentukan $L^{-1}(F)$.

Penyelesaian:

Invers dari transformasi Laplace juga bersifat linier sehingga

$$L^{-1}(F) = L^{-1}\{\frac{1}{a-b}(\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s-b})\}$$

$= \dfrac{1}{a-b}[L^{-1}(\dfrac{1}{s-a}) - L^{-1}(\dfrac{1}{s-b})]$

$= \dfrac{1}{a-b}(e^{at} - e^{bt})$.

3. Jika F(s) = $\dfrac{s}{(s-a)(s-b)}$ dengan a≠b, tentukan L^{-1}(F).

Penyelesaian:

$L^{-1}(F) = L^{-1}\{\dfrac{1}{a-b}(\dfrac{a}{s-a} - \dfrac{b}{s-b})\}$

$= \dfrac{1}{a-b}[aL^{-1}(\dfrac{1}{s-a}) - bL^{-1}(\dfrac{1}{s-b})]$

$= \dfrac{1}{a-b}(ae^{at} - be^{bt})$.

Latihan.

Tentukan Transformasi Laplace dari:

1. f(t) = t
2. f(t) = t^2
3. f(t) = t^n, n=1,2,3,…
4. f(t) = t^a, a>0
5. f(t) = cos ωt
6. f(t) = sin ωt
7. f(t) = sinh t

6.2. Keujudan Transformasi Laplace

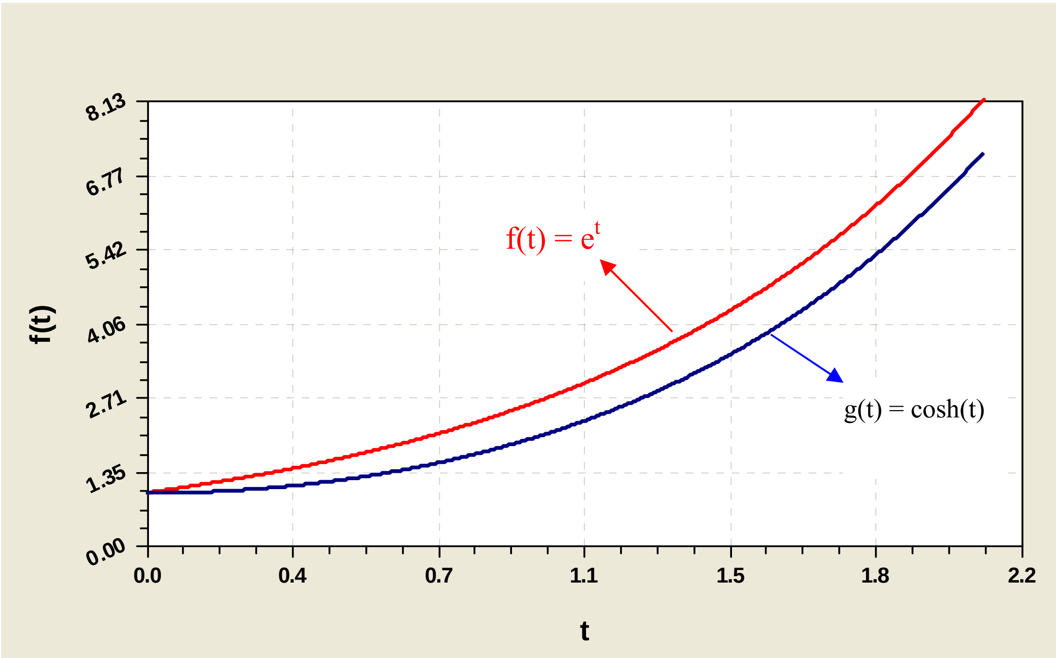
Suatu fungsi yang terdefinisi untuk t>0 mungkin memiliki transformasi Laplace, tetapi mungkin juga tidak memiliki (nilai integral dalam definisi 1 tidak ada). Keujudan transformasi Laplace dijamin oleh:

Teorema 2:

Misal f(t) fungsi yang kontinu perbagian (piecewise continuous) pada setiap interval dalam range $t \geq 0$ dan memenuhi $|f(t)| \leq Me^{\gamma t}$, untuk setiap $t \geq 0$,

Dengan γ dan M konstan. Maka transformasi Laplace dari f(t) ada untuk semua $s>\gamma$.

Contoh 3: karena $\cosh t < e^t$ dan $t^n \leq n!e^t$ (n=0,1,2,…) untuk setiap $t \geq 0$, maka transformasi Laplace dari cosh t dan t^n ada.



Gambar grafik fungsi cosht dan e^t, terlihat bahwa untuk setiap t > 0 berlaku $\cosh t \leq e^t$.

Perhatian:

1. Teorema di atas merupakan syarat cukup dari eksistensi Transformasi Laplace, bukan syarat perlu.

   Sebagai contoh f(t) = $\frac{1}{\sqrt{t}}$ tidak memenuhi syarat dalam teorema (karena f(0) = ∞), tetapi L($\frac{1}{\sqrt{t}}$) ada, yaitu

   $$L(\frac{1}{\sqrt{t}}) = \int_0^\infty e^{-st} t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_0^\infty e^{-x} x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{s}} \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\frac{\pi}{s}} .$$

2. Jika Transformasi Laplace dari suatu fungsi ada maka transformasi itu tunggal.
3. Jika dua buah fungsi mempunyai Transformasi Laplace yang sama maka dua fungsi itu hanya berbeda pada titik-titik terisolasinya saja. Jadi dapat dikatakan bahwa invers dari suatu Transformasi Laplace secara essensial adalah sama. Dalam hal fungsi kontinu, maka keduanya benar-benar sama.

6.3. Tansformasi Laplace Turunan

Jika transformasi Laplace dari f diketahui dan turunan dari f ada, kita dapat mempertanyakan apakah transformasi Laplace dari f' juga ada atau apakah ada syarat lain yang dapat menjamin keujudan dari transformasi Laplace f'. Lebih lanjut, jika transformasi Laplace dari f' ada, apakah ada hubungan di antara ke duanya. Hal ini diberikan oleh teorema berikut.

Teorema 3:

Misal f(t) kontinu untuk $t \geq 0$ dan memenuhi syarat teorema 2 dan mempunyai turunan f'(t) yang kontinu perbagian pada setiap interval hingga dalam range $t \geq 0$. Maka TL dari f'(t) ada untuk $s > \gamma$ dan diberikan oleh

$$L(f') = sL(f) - f(0), \quad (s < \gamma).$$

Catatan:

Teorema di atas dapat diperluas untuk mendapatkan:

$$L(f'') = s^2 L(f) - sf(0) - f'(0),$$

$$L(f''') = s^3 L(f) - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0), \quad \text{dst.}$$

Yang dengan induksi diperoleh:

Teorema 4:

Misal f(t), f'(t), f''(t),…,$f^{(n-1)}(t)$ fungsi-fungsi kontinu untuk $t \geq 0$, dan memenuhi syarat dalam teoema 2 untuk suatu γ dan M dan misal $f^{(n)}(t)$ kontinu perbagian pada setiap interval dalam range $t \geq 0$. Maka TL $f^{(n)}$ ada jika $s > \gamma$ dan diberikan oleh:

$$L(f^{(n)}) = s^n L(f) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0).$$

Contoh 4 (penerapan teorema 4):

1. Tentukan $L(t^2)$.

Penyelesaian:

$$f(t) = t^2, \text{ maka}$$

$$f(0) = 0,$$

$$f'(0) = 0,$$

$$f''(t) = 2,$$

$$L(2) = 2/s,$$

sehingga

$$L(f'') = L(2)$$

$$=2/s$$

$$= s^2 L(f).$$

Jadi

$$L(f) = L(t^2)$$

$$= 2/s^3.$$

2. Tentukan L(cos ωt).

Penyelesaian:

f(t) = cos ωt,

maka

$$f''(t) = -\omega^2 \cos\omega t,$$

$$f(0) = 1, \text{ dan}$$

$$f'(0) = 0.$$

Maka

$$-\omega^2 L(f) = L(f'')$$

$$= s^2 L(f) - s$$

sehingga

$$L(f) = L(\cos \omega t)$$

$$= s/(s^2 + \omega^2).$$

Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa

$$L(\sin \omega t) = w/(s^2 + \omega^2).$$

3. Tentukan $L(\sin^2 t)$.

Penyelesaian:

$$f(t) = \sin^2 t,$$

maka

$$f(0) = 0,$$

$$f'(t) = 2 \sin t \cos t$$

$$= \sin 2t.$$

Dengan Teorema 3,

$$L(\sin 2t) = 2/(s^2+4)$$

$$= sL(f)$$

sehingga

$$L(\sin^2 t) = \frac{2}{s(s^2+4)}.$$

4. Tentukan Selesaian MNA:

$$y''+4y'+3y = 0,\ y(0)=3,\ y'(0)=1.$$

Penyelesaian:

Langkah 1. Menyusun persamaan pengganti:

Misal Y(s) = L(y), (y fungsi yang akan dicari).

Dengan teorema (3), (4) dan syarat awal, maka

$$L(y') = sY-y(0)$$

$$= sY-3$$

$$L(y'') = s^2Y - sy(0) - y'(0)$$

$= s^2Y-3s-1.$

Selanjutnya L(y), L(y') dan L(y'') disubstitusikan ke dalam TL dari PD nya:

$$s^2Y+4sY+3Y=3s+1+4.3 \text{ atau}$$

$$(s+3+(s+1)Y = 3s+13 \quad \text{(persamaan pengganti).}$$

Langkah 2. Selesaikan persamaan pengganti (dengan cara aljabar):

$$Y=\frac{3s+13}{(s+3)(s+1)}=\frac{-2}{s+3}+\frac{5}{s+1}.$$

Langkah 3. Tentukan transformasi invers dari selesaian persamaan pengganti untuk memperoleh selesaian MNA:

Karena

$$L^{-1}(1/(s-3)) = e^{-3t} \text{ dan}$$

$$L^{-1}(1/(s+1))=e^{-t},$$

dengan menggunakan sifat linier diperoleh

$$y(t)=-2e^{-3t}+5e^{-t}.$$

6.4. Transformasi Laplace Integral.

Teorema 5:

Jika f(t) kontinu perbagian dan memenuhi syarat dari teorema 2, maka

$$L\left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right)=\frac{1}{s}L(f(t)) \text{ , dengan } s>0 \text{ dan } s>\gamma.$$

Dari hubungan dalam teorema 5, dapat ditunjukkan;

$$L^{-1}\{\frac{1}{s}F(s)\} = \int_0^t f(\tau)d\tau .$$

Contoh 5

Misal $L(f) = \dfrac{1}{s(s^2+\omega^2)}$, tentukan f(t).

Penyelesaian

Karena

$$L^{-1}(\frac{1}{(s^2+\omega^2)}) = \frac{1}{\omega}\sin\omega t ,$$

dengan teorema 5 diperoleh

$$L^{-1}(\frac{1}{s}\frac{1}{(s^2+\omega^2)}) = \frac{1}{\omega}\int_0^t \sin\omega\tau d\tau = \frac{1}{\omega^2}(1-\cos\omega t) .$$

Contoh 6

Misal L(f)=($\dfrac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}$). Tentukan f(t).

Dengan cara seperti di atas,

$$L^{-1}(\frac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}) = \frac{1}{\omega^2}\int_0^t (1-\cos\omega\tau)d\tau.$$

Latihan.

1. Gunakan Teorema 4 untuk menghitung:

   a. L(t cos ωt)

   b. L(t sin ωt)

c. L(t cosh at).

d. L(t sinh at).

2. Dengan rumus Transformasi dari turunan, tentukan L(sin ωt) dari rumus L(cos ωt).

3. Gunakan Teorema 5 untuk menentukan f(t) jika L(f) adalah:

   a. $1/(s^2+s)$

   b. $\dfrac{1}{s^2(s+1)}$

   c. $\dfrac{s-1}{s^2(s+1)}$

   d. $\dfrac{s+1}{s^2(s^2+1)}$.

   e. $\dfrac{1}{s(s-2)}$

   f. $\dfrac{4}{s(s^2-1)}$

   g. $\dfrac{1}{s^4-2s^2}$

   h. $\dfrac{1}{s^2}(\dfrac{s-1}{s+1})$

4. Gunakan TL untuk menyelesaikan MNA:

   a. y’’-2y’-3y=0, y(0)=1, y’(0)=7

   b. 4y’’+y=0, y(0)=1, y’(0)=-2.

c. $Y'' + 2y' - 8y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 8$.

d. $Y'' + 25y = t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0{,}04$.

6.5 Pergeseran pada Sumbu s

Salah satu sifat penting dari transformasi laplace adalah sifat pergeseran pada sumbu s dan sumbu t.

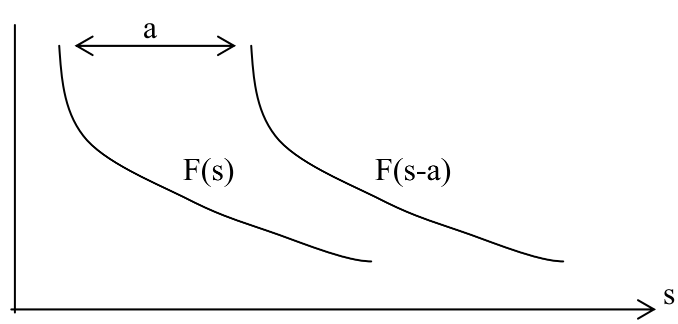
Teorema 6 (pergeseran pada sumbu s)

Jika f(t) mempunyai transformasi Laplace F(s) dengan $s>\gamma$, maka $e^{at}f(t)$ mempunyai transformasi F(s-a) dengan $s-a>\gamma$.

Dengan teorema di atas, jika kita mengetahui transformasi Laplace dari f(t) maka kita dapat menentukan transformasi Laplace dari $e^{at}f(t)$ secara mudah. Berdasarkan teorema di atas, kita juga dapat menentukan invers transformasi dari F(s-a) jika invers transformasi dari F(s) diketahui, yakni

$$L^{-1}(F(s-a)) = e^{at}f(t).$$

Hubungan antara F(s) dan F(s-a) diberikan oleh ilustrasi berikut:



Beberapa rumus yang dapat diturunkan berdasarkan rumus-rumus sebelumnya dan dengan menggunakan teorema tersebut adalah

f(t)	L(f)
$e^{at}t^n$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$e^{at}\cos\omega t$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
$e^{at}\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$

Contoh 7:

Gunakan rumus invers transformasi Laplace untuk menentukan selesaian masalah nilai awal dari masalah gerak pegas teredam:

$y''+2y'+5y = 0$, $y(0)=2$, $y'(0) = -4$.

Penyelesaian.

Persamaan bantu dari MNA di atas adalah

$s^2Y-2s+4+2(sY-2)+5Y=0$,

yang dapat disederhanakan secara manipulasi aljabar menjadi

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{2s}{(s+1)^2+2^2} \\ &= 2\frac{s+1}{(s+1)^1+2^2} - \frac{2}{(s+1)^2+2^2}. \end{aligned}$$

Karena

$$L^{-1}\left(\frac{s}{(s+1)^1+2^2}\right) = \cos 2t \quad \text{dan } L^{-1}\left(\frac{2}{(s+1)^2+2^2}\right) = \sin 2t,$$

maka selesaian MNAnya adalah:

$$y(t) = L^{-1}(Y) = e^{-t}(2\cos 2t - \sin 2t)$$

6.6. Pergeseran pada Sumbu t

Pada teorema di atas, kita dapat menggunakan pergeseran pada sumbu s dari F(s) untuk menentukan transformasi Laplace dari $e^{at}f(t)$. Berikut ini kita akan menentukan transformasi Laplace dari $\overline{f}$ (t) yang didefinisikan dengan

$$\overline{f}(t) = \begin{cases} 0, & t < a \\ f(t-a), & t > a. \end{cases}$$

Ini dikenal dengan pergeseran pada sumbu t, yakni dengan mengganti t dengan t-a dalam f(t).

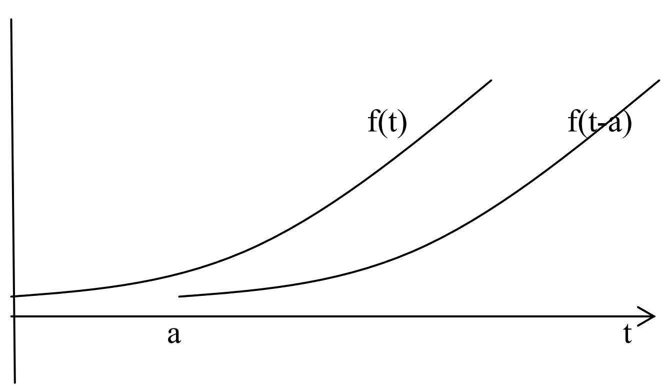
Teorema (Pergeseran pada sumbu t)

Jika f(t) mempunyai transformasi Laplace F(s) dan fungsi $\overline{f}$ didefinisikan dengan

$$\overline{f}(t) = \begin{cases} 0, & t < a \\ f(t-a), & t > a. \end{cases}$$

dengan $a \geq 0$, maka transformasi Laplace dari $\overline{f}$ (t) adalah $e^{-as}F(s)$.

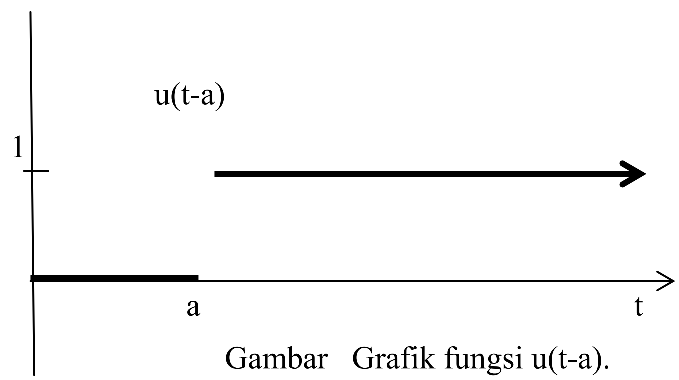
Hubungan antara f dan $\overline{f}$ dapat diilustrasikan sebagai berikut:



Contoh 8

Perhatikan fungsi tangga satuan u(t-a) yang didefinisikan dengan

$$u(t) = \begin{cases} 0, \; jika\, t < a \\ 1, \; jika\, t > a \end{cases}$$, digambarkan seperti



Gambar   Grafik fungsi u(t-a).

Fungsi tangga satuan dapat digunakan sebagai blok pembangun fungsi-fungsi yang lain dan dapat dimanfaatkan untuk memperluas penggunaan transformasi Laplace.

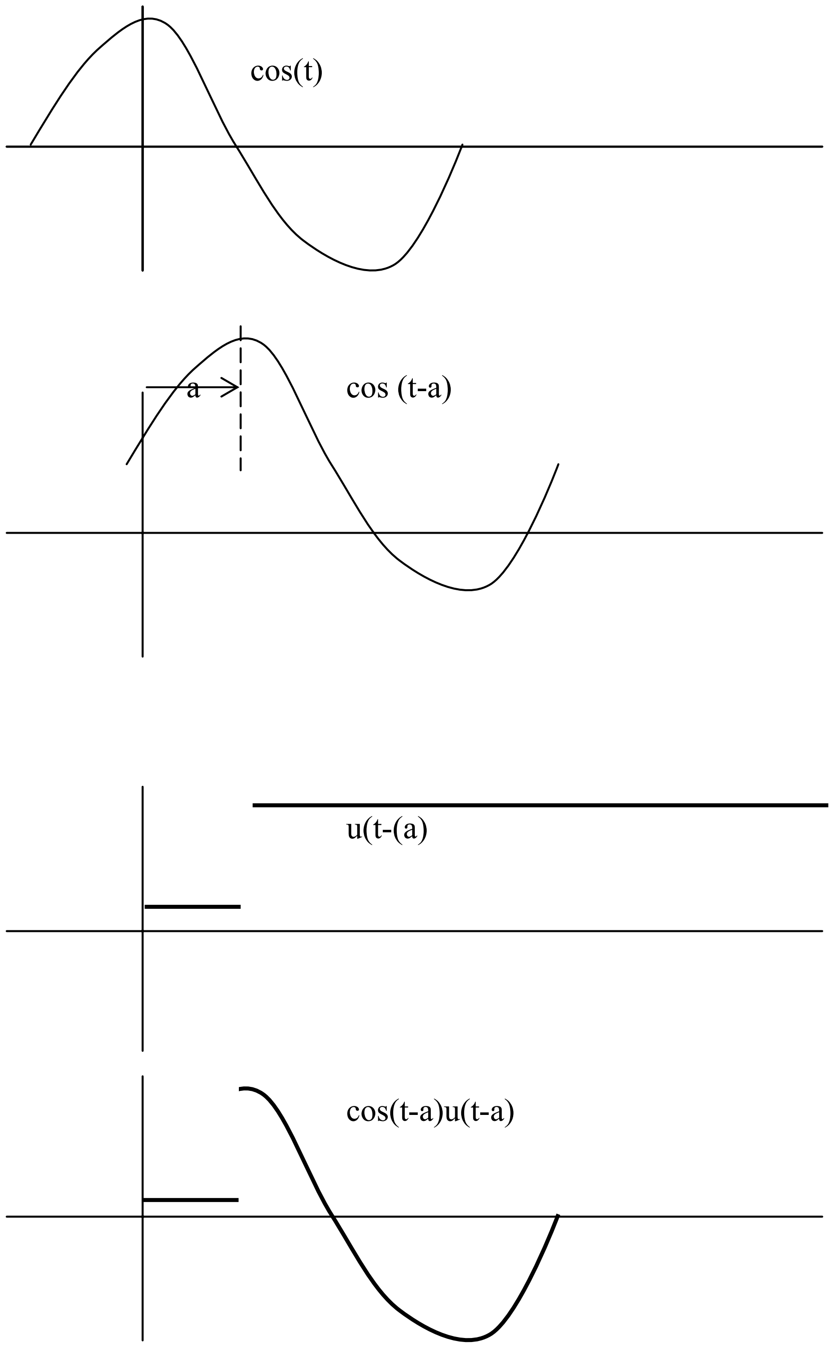
Dari definisi transformasi Laplace, kita dapat menunjukkan bahwa

$$L(u(t-a)) = e^{-as}/s.$$

Fungsi $\overline{f}$ yang kita definisikan di depan dapat $\overline{f}$ dituliskan sebagai:

$$\overline{f}\,(t) = f(t-a)u(t-a).$$

Kaitan antara f dan $\overline{f}$ diberikan oleh contoh f(t) = cos t dan $\overline{f}$ (t)=u(t-a)cos(t-a) yang dapat digambarkan sebagai berikut:



Dengan menggunakan teorema di atas, maka

$L(f(t-a)u(t-a)) = e^{-as}F(s)$,

Atau

$L^{-1}(e^{-as}F(s)) = f(t-a)u(t-a)$.

Contoh 9

Tentukan Invers Transformasi Laplace dari

$$e^{-as}/s^3.$$

Penyelesaian:

Karena $L^{-1}(1/s^3) = t^2/2 = ½(t\text{-}3)^2u(t\text{-}3)$.

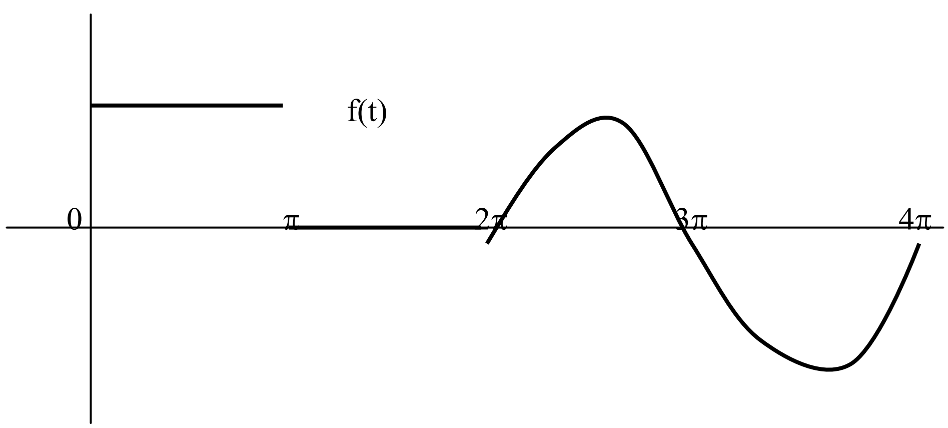
Contoh 10

Jika fungsi f didefinisikan dengan

$$f(t) = \begin{cases} 1,\ jika\ 0 < t < \pi \\ 0,\ jika\ \pi < t < 2\pi \\ \sin t,\ jika\ t > 2\pi, \end{cases}$$

Carilah L(f).

Penyelesaian



Fungsi f di atas dapat dituliskan dalam bentuk kombinasi dari fungsi-fungsi tangga satuan:

$f(t) = u(t) – u(t\text{-}\pi) + u(t\text{-}2\pi)\sin t$

$\quad = u(t) – u(t\text{-}\pi) + u(t\text{-}2\pi)\sin(t\text{-}2\pi)$,

Sehingga

$L(f) = L(u(t) – u(t\text{-}\pi) + u(t\text{-}2\pi)\sin(t\text{-}2\pi))$

oh $= 1/s - e^{-\pi s}/s + e^{-2\pi s}/(s^2+1)$.

Contoh 11

Response suatu sistem tanpa redaman terhadap gelombang tunggal persegi diberikan oleh masalah nilai awal

$$y'' + 2y = r(t),\ \ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,$$

dengan

$$r(t) = \begin{cases} 1, untuk\ \ 0 < t < 1 \\ 0, untuk\, t\ yang\, lain. \end{cases}$$

Selesaikanlah masalah nilai awal tersebut dengan menggunakan transformasi Laplace.

Penyelesaian.

Dengan menggunakan teorema untuk transformasi Laplace turunan, maka persamaan pengganti dari PD di atas adalah

$$s^2Y + 2Y = 1/s - e^{-s}/s,$$

yang selesaiannya adalah

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s(s^2+2)} - \frac{e^{-s}}{s(s^2+2)} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+2}\right) - \frac{e^{-s}}{s(s^2+2)}. \end{aligned}$$

Sehingga invers transformasinya adalah

$$y(t) = \frac{1}{2}(1 - \cos\sqrt{2}t) - \frac{1}{2}(1 - \cos\sqrt{2}(t-1))u(t-1),$$

Atau

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1-\cos\sqrt{2}t), \; jika\, 0 \le t < 1 \\ \frac{1}{2}\cos\sqrt{2}(t-1) - \frac{1}{2}\cos\sqrt{2}t, \; jika\, t > 1 \end{cases}$$

Latihan

Gunakan teorema pergeseran pada sumbu t untuk mencari Transformasi Laplace dari:

1. (t-1)u(t-1)

1. $(t-1)^2u(t-1)$

2. u(t-π)cost

3. $e^{-2t}u(t-1)$.

4. Selesaikan masalah nilai awal y''+3y'+2y = r(t), y(0) = 0, y'(0) = 0,

   dengan

$$r(t) = \begin{cases} 1, untuk\; 0 < t < 1 \\ 0, \; untuk\;\; t \; yang\; lain. \end{cases}.$$

6.7. Turunan Transformasi Laplace

Sifat-sifat transformasi Laplace seperti telah diuraikan di depan dapat dipergunakan untuk menentukan transformasi atau invers transformasi dari beberapa fungsi. Penggunaan sifat turunan dan integral transformasi akan dapat melengkapi keampuhan dari transformasi Laplace.

Dengan menggunakan definisi dari transformasi Laplace, kita dapat menunjukkan bahwa jika F(s) adalah transformasi Laplace dari f, maka F'(s) adalah transformasi Laplace dari –tf(t), atau

$$L(tf(t)) = -F'(s).$$

Dengan menggunakan sifat ini kita dapat menambahkan rumus transformasi Laplace dari beberapa fungsi:

	L(f)	f(t)
(1)	$\dfrac{1}{(s^2+\beta^2)^2}$	$\dfrac{1}{2\beta^3}(\sin\beta t - \beta t\cos\beta t)$
(2)	$\dfrac{s}{(s^2+\beta^2)^2}$	$\dfrac{1}{2\beta}t\sin\beta t$
(3)	$\dfrac{s^2}{(s^2+\beta^2)^2}$	$\dfrac{1}{2\beta}(\sin\beta t + \beta t\cos\beta t)$

Rumus-rumus di atas diturunkan dari rumus transformasi sinβt dan cos βt, yaitu:

Ambil f(t) = sinβt , maka

$$L(\sin\beta t) = \frac{\beta}{s^2+\beta^2} = F(s),$$

Sehingga

$$F'(s) = \frac{-2\beta s}{(s^2+\beta^2)^2},$$

Sehingga menurut rumus turunan transformasi diperoleh

$$L(t\sin\beta t) = \frac{2\beta s}{(s^2+\beta^2)^2}\ ,\text{.........(i)}$$

Selanjutnya, ambil g(t) = cosβt , maka

$$L(\cos\beta t) = \frac{s}{s^2+\beta^2} = G(s),$$

Sehingga

$$G'(s) = -\frac{s^2 - \beta^2}{(s^2 + \beta^2)^2},$$

Sehingga menurut rumus turunan transformasi diperoleh

$$L(t\cos\beta t) = \frac{(s^2 - \beta^2)}{(s^2 + \beta^2)^2}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(ii)$$

Dengan membagi (i) dengan $\frac{1}{2\beta}$ diperoleh

$$L\left(\frac{1}{2\beta} t\sin\beta t\right) = \frac{s}{(s^2 + \beta^2)^2}$$

Atau

$$L^{-1}\left(\frac{s}{(s^2 + \beta^2)^2}\right) = \frac{1}{2\beta} t\sin\beta t,$$

rumus (2) terbukti.

Dengan mengalikan (ii) dengan β dan kemudian menambahkan rumus transformasi Laplace untuk sinβt, diperoleh

$$L(\sin\beta t + \beta t\cos\beta t) = \frac{\beta}{(s^2 + \beta^2)} + \frac{\beta(s^2 - \beta^2)}{(s^2 + \beta^2)^2}$$

$$= \frac{\beta(s^2 + \beta^2) + \beta(s^2 - \beta^2)}{(s^2 + \beta^2)^2}$$

$$= \frac{2\beta s^2}{(s^2 + \beta^2)^2},$$

Sehingga diperoleh

$$L\left(\frac{1}{2\beta}\ (\sin\beta t+\beta t\cos\beta t)\right)=\frac{s^2}{(s^2+\beta^2)^2}$$

Rumus (3) terbukti.

Secara sama, dengan mengalikan (ii) dengan β dan kemudian dikurangkan dengan rumus transformasi Laplace untuk sinβt, diperoleh

$$L(\sin\beta t-\beta t\cos\beta t)=\frac{\beta}{(s^2+\beta^2)}-\frac{\beta(s^2-\beta^2)}{(s^2+\beta^2)^2}$$

$$=\frac{\beta(s^2+\beta^2)-\beta(s^2-\beta^2)}{(s^2+\beta^2)^2}$$

$$=\frac{2\beta^3}{(s^2+\beta^2)^2},$$

Sehingga diperoleh

$$L\left(\frac{1}{2\beta^3}\ (\sin\beta t-\beta t\cos\beta t)\right)=\frac{1}{(s^2+\beta^2)^2},$$

Rumus (1) terbukti.

Latihan 6.7

Gunakan turunan transformasi Laplace untuk menentukan transformasi Laplace dari:

1. $t\ e^t$
2. t^2e^{2t}
3. t^2e^{-t}
4. t sin 3t
5. $t^2 \cos t$

6. $te^{-t}\cos t$

7. $t\,e^{-2t}\sin\omega t$

8. $t\sinh t$

9. $t^2\sinh 2t$

10. $t\,e^{-t}\cosh 2t$

6.8 Integral Transformasi Laplace

Jika F(s) merupakan transformasi Laplace dari f(t), dan limit dari f(t)/t untuk t menuju nol ada, kita dapat mempertanyakan hubungan antara transformasi Laplace dari f(t)/t dengan F(s). Hubungan tersebut diberikan oleh:

$$L(f(t)/t) = \int_s^\infty F(\tilde{s})\,d\tilde{s}\ .$$

Hubungan di atas dapat digunakan untuk menambah beberapa rumus transformasi Laplace atau invers transformasi laplace. Sebagai contoh kita dapat mencari invers transformasi dari ($\ln(1+\frac{\omega^2}{s^2})$, dengan langkah-langkah sebagai berikut:

Dengan melakukan penurunan diperoleh

$$-\frac{d}{ds}(\ln(1+\frac{\omega^2}{s^2}) = \frac{2\omega^2}{s(s^2+\omega^2)}$$

$$= \frac{2}{s} - 2\frac{s}{s^2+\omega^2}\ ,$$

Jika diambil

$$F(s) = \frac{2}{s} - 2\frac{s}{s^2+\omega^2}\ ,$$

Maka

f(t) = L^{-1}(F(s))

$$= L^{-1}\left(\frac{2}{s} - 2\frac{s}{s^2+\omega^2}\right)$$

$$= 2 - 2\cos\omega t.$$

Dengan menggunakan integral transformasi Laplace

$$L(f(t)/t) = \int_s^\infty F(\tilde{s})d\tilde{s}\ .$$

diperoleh:

$$L((2 - 2\cos\omega t)/t) = \int_s^\infty \left(\frac{2}{\tilde{s}} - 2\frac{\tilde{s}}{\tilde{s}^2+\omega^2}\right)d\tilde{s}$$

$$= \left[\ -\ln\left(1+\frac{\omega^2}{\tilde{s}^2}\right)\ \right]_s^\infty$$

$$= \ln\left(1+\frac{\omega^2}{s^2}\right),$$

Atau

$$L^{-1}\left(\ln\left(1+\frac{\omega^2}{s^2}\right)\right) = 2(1-\cos\omega t)/t.$$

Contoh lain, dengan penggunaan rumus integral transformasi kita dapat memperoleh

$$L^{-1}\left(\ln\left(1-\frac{a^2}{s^2}\right)\right) = 2(1-\cosh at)/t.$$

Latihan 6.8

Gunakan integral transformasi Laplace untuk menentukan transformasi Laplace dari:

1. $\dfrac{2s}{(s^2+1)^2}$

2. $\dfrac{s}{(s^2+4)^2}$

3. $\dfrac{6s}{(s^2-9)^2}$

4. $\dfrac{2s-6}{(s^2++6s+10)^2}$

5. $\ln\left(\dfrac{s+5}{s-5}\right)$

6. $\ln\left(\dfrac{s+a}{s+b}\right)$

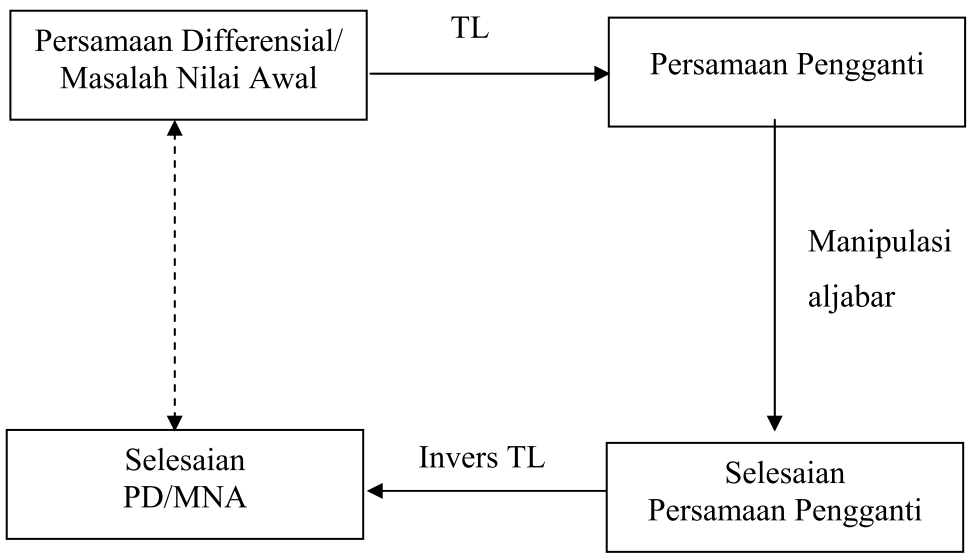
7. $\ln\left(\dfrac{s^2+1}{(s-1)^2}\right)$

8. arc cot (s/ω).

RINGKASAN BAB VI

TRANSFORMASI LAPLACE

Transformasi Laplace merupakan salah satu metode yang digunakan untuk menyelesaikan suatu persamaan diferensial dan masalah nilai awal. Prosedur tersebut dapat digambarkan dalam bagan berikut:



Gambar Proses penyelesaian persamaan differensial atau masalah nilai awal dengan menggunakan Transformasi Laplace.

6.1. Pengertian Transformasi Laplace

Definisi 1. Misal f(t) terdefinisikan untuk $t \geq 0$. Dibentuk fungsi F dengan

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt \,.$$

Jika F(s) ada maka F(s) disebut transformasi Laplace dari f(t) dan dinotasikan dengan L(f). Dalam hal ini f(t) disebut transformasi invers dari F(s) dan dinotasikan dengan L^{-1}(F). Jadi,

$$F(s) = L(f) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

$$f(t) = L^{-1}(F).$$

Teorema 1. (Sifat Linier):

Jika

$$L(f(t)) \text{ dan } L(g(t))$$

ada dan a, b konstan maka

$$L\{af(t)+bg(t)\} = aL(f(t))+bL(g(t)).$$

6.2. Keujudan Transformasi Laplace

Teorema 2:

Misal f(t) fungsi yang kontinu perbagian (piecewise continuous) pada setiap interval dalam range $t \geq 0$ dan memenuhi $|f(t)| \leq Me^{\gamma t}$, untuk setiap $t \geq 0$,

Dengan γ dan M konstan. Maka transformasi Laplace dari f(t) ada untuk semua $s > \gamma$.

Perhatian:

1. Teorema di atas merupakan syarat cukup dari eksistensi Transformasi Laplace, bukan syarat perlu.
2. Jika Transformasi Laplace dari suatu fungsi ada maka transformasi itu tunggal.

3. Jika dua buah fungsi mempunyai Transformasi Laplace yang sama maka dua fungsi itu hanya berbeda pada titik-titik terisolasinya saja. Jadi dapat dikatakan bahwa invers dari suatu Transformasi Laplace secara essensial adalah sama. Dalam hal fungsi kontinu, maka keduanya benar-benar sama.

6.3. Tansformasi Laplace Turunan

Teorema 3:

Misal f(t) kontinu untuk $t \geq 0$ dan memenuhi syarat teorema 2 dan mempunyai turunan f'(t) yang kontinu perbagian pada setiap interval hingga dalam range $t \geq 0$. Maka TL dari f'(t) ada untuk $s > \gamma$ dan diberikan oleh

$$L(f') = sL(f) - f(0), \quad (s < \gamma).$$

Teorema 4:

Misal f(t), f'(t), f''(t),…,$f^{(n-1)}(t)$ fungsi-fungsi kontinu untuk $t \geq 0$, dan memenuhi syarat dalam teoema 2 untuk suatu γ dan M dan misal $f^{(n)}(t)$ kontinu perbagian pada setiap interval dalam range $t \geq 0$. Maka TL $f^{(n)}$ ada jika $s > \gamma$ dan diberikan oleh:

$$L(f^{(n)}) = s^n L(f) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0).$$

6.4. Transformasi Laplace Integral.

Teorema 5:

Jika f(t) kontinu perbagian dan memenuhi syarat dari teorema 2, maka

$$L\left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right) = \frac{1}{s} L(f(t)) \text{, dengan } s>0 \text{ dan } s>\gamma.$$

Dari hubungan dalam teorema 5, dapat ditunjukkan;

$$L^{-1}\{\frac{1}{s}F(s)\} = \int_0^t f(\tau)d\tau\,.$$

6.5 Pergeseran pada Sumbu s

Teorema 6 (pergeseran pada sumbu s)

Jika f(t) mempunyai transformasi Laplace F(s) dengan s>γ, maka $e^{at}f(t)$ mempunyai transformasi F(s-a) dengan s-a>γ. Jadi $L^{-1}(F(s-a))=e^{at}f(t)$.

Beberapa rumus yang dapat diturunkan dengan menggunakan teorema tersebut adalah

f(t)	L(f)
$e^{at}t^n$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$e^{at}\cos\omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
$e^{at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$

6.6 Pergeseran pada Sumbu t

Teorema (Pergeseran pada sumbu t)

Jika f(t) mempunyai transformasi Laplace F(s) dan fungsi $\overline{f}$ didefinisikan dengan

$$\overline{f}(t) = \begin{cases} 0, & t < a \\ f(t-a), & t > a. \end{cases}$$

dengan a≥0, maka transformasi Laplace dari $\overline{f}$ (t) adalah $e^{-as}F(s)$.

6.7 Turunan Transformasi Laplace.

Dengan menggunakan definisi dari transformasi Laplace, kita dapat menunjukkan bahwa jika F(s) adalah transformasi Laplace dari f, maka F'(s) adalah transformasi Laplace dari –tf(t), atau

$$L(tf(t)) = -F'(s).$$

Dengan menggunakan sifat ini kita dapat menambahkan rumus transformasi Laplace dari beberapa fungsi:

	L(f)	f(t)
(1)	$\frac{1}{(s^2+\beta^2)^2}$	$\frac{1}{2\beta^3}(\sin\beta t - \beta t\cos\beta t)$
(2)	$\frac{s}{(s^2+\beta^2)^2}$	$\frac{1}{2\beta}t\sin\beta t$
(3)	$\frac{s^2}{(s^2+\beta^2)^2}$	$\frac{1}{2\beta}(\sin\beta t + \beta t\cos\beta t)$

6.8 Integral Transformasi Laplace

Jika F(s) merupakan transformasi Laplace dari f(t), dan limit dari f(t)/t untuk t menuju nol ada maka L(f(t)/t) ada dan

$$L(f(t)/t) = \int_s^\infty F(\tilde{s})d\tilde{s}\ .$$

Tabel Transformasi Laplace

No.	F(s) = L(f(t))	f(t)
1.	$\frac{1}{s}$	1
2.	$\frac{1}{s^2}$	t
3.	$\frac{1}{s^a}$, a>0	$t^{a-1}/\Gamma(a)$
4.	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
5.	$\frac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}
6.	$\frac{1}{(s-a)^n}$, n = 1,2,…	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{at}$
7.	$\frac{1}{(s-a)^k}$, k>0	$\frac{1}{\Gamma(k)}t^{k-1}e^{at}$
8.	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$, a≠b	$\frac{1}{(a-b)}(e^{at}-e^{bt})$
9.	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}$, a≠b	$\frac{1}{(a-b)}(ae^{at}-be^{bt})$
10.	$\frac{1}{s^2+\omega^2}$	$\frac{1}{\omega}\sin\omega t$
11.	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	cos ωt
12.	$\frac{1}{s^2-a^2}$	$\frac{1}{a}\sinh at$

13.	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	cosh at
14.	$\frac{1}{(s-a)^2 + \omega^2}$	$\frac{1}{\omega} e^{at} \sin \omega t$
15.	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2}$	$e^{at} \cos \omega t$
16.	$\frac{1}{s(s^2 + \omega^2)}$	$\frac{1}{\omega^2}(1 - \cos \omega t)$
17.	$\frac{1}{s^2(s^2 + \omega^2)}$	$\frac{1}{\omega^3}(\omega t - \sin \omega t)$
18.	$\frac{1}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega^3}(\sin \omega t - \omega t \cos \omega t)$
19.	$\frac{s}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega} \sin \omega t$
20.	$\frac{s^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega}(\sin \omega t + \omega t \cos \omega t)$
21.	$\frac{s}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}$, $a^2 \neq b^2$	$\frac{1}{b^2 - a^2}(\cos at - \cos bt)$
22.	e^{-as}/s	u(t-a)
23.	e^{-as}	δ(t-a)
24.	$\frac{1}{s} \ln s$	ln t − γ, γ=0,5772
25.	$\ln \frac{s-a}{s-b}$	$\frac{1}{t}(e^{bt} - e^{at})$

26.	$\ln \dfrac{s^2 + \omega^2}{s^2}$	$\dfrac{2}{t}(1 - \cos \omega t)$
27.	$\ln \dfrac{s^2 - a^2}{s^2}$	$\dfrac{2}{t}(1 - \cosh at)$
28.	$\arctan \dfrac{\omega}{s}$	$\dfrac{1}{t} \sin \omega t$