BAB V

SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL

Kompetensi

Mahasiswa dapat

1. Membangun sistem persamaan diferensial dari beberapa persamaan yang bergantung pada satu variabel bebas yang sama.
2. Menentukan selesaian sistem PD dengan cara eliminasi.
3. Menentukan selesaian sistem PD dengan cara determinan.

Materi

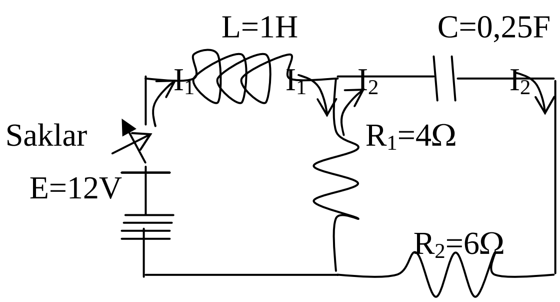
1. Model Sistem Persamaan Differensial
2. Metode Eliminasi
3. Metode Matriks

BAB V

SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL

5.1 Model Sistem Persamaan Differensial

Sistem persamaan differensial sering digunakan untuk menyusun model yang merupakan beberapa kombinasi sistem sederhana. Sebagai contoh, sistem persamaan differensial dapat digunakan untuk menyusun model jaringan listrik dalam suatu rangkain tertutup seperti berikut;



Besar arus I_1 dan I_2 yang mengalir pada rangkaian terttutup tersebut diberikan oleh sistem persamaan differensial:

$I_1' + 4I_1 - 4I_2 = 12$ (rangkaian sebelah kiri)

$-4I_1' + 10I_2' + 4I_2 = 0$ (rangkaian sebelah kanan),

yang merupakan suatu sistem persamaan differensial yang terdiri dari dua buah persamaan differensial yang berkaitan satu dengan lainnya. Untuk menyelesaian sistem persamaan differensial tersebut pada Bab ini akan kita pelajari beberapa metode yang dapat digunakan.

Misal x dan y fungsi-fungsi dari variabel bebas t. Suatu sistem yang terdiri dari persamaan-persamaan yang melibatkan x, y dan turunan-turunannya, serta fungsi-fungsi dari t yang diketahui, disebut sistem persamaan diferensial. Selesaian dari sistem persamaan diferensial adalah fungsi-fungsi yang memenuhi sistem PD itu. Dalam menyelesaikan suatu sistem PD dikenal metode eliminasi dan metode matriks.

5.2 Metode Eliminasi

Dalam menentukan selesaian sistem PD dengan menggunakan metode eliminasi, fungsi-fungsi yang tidak diketahui beserta derivatif-derivatifnya dieliminasi secara terus menerus sampai diperoleh sebuah PD berorde lebih tinggi yang hanya melibatkan satu fungsi yang tidak diketahui.

Contoh 1:

Sistem PD orde satu:

$$\text{(i).} \quad x'=a_1x+b_1y+f_1(t)$$

$$\text{(ii).} \quad y'=a_2x+b_2y+f_2(t),$$

dengan f_1 dan f_2 fungsi-fungsi yang diketahui, a_1,a_2,b_1,b_2 konstan, x dan y fungsi-fungsi dari t yang tidak diketahui.

Jika

$$b_1=a_2=0$$

maka sistem terdiri dari dua PD linier orde satu yang terpisah, sehingga dapat diselesaikan satu per satu. Jadi dapat dianggap bahwa salah satunya tidak nol. Misal $b_1\neq0$.

Jika (i) diturunkan diperoleh:

$$x'' = a_1x'+b_1y'+f_1'$$

$= a_1x'+b_1(a_2x+b_2y+f_2)+f_1'$

$= a_1x'+b_1a_2x+b_2(x'-a_1x-f_1)+b_1f_2+f_1'$,

atau

$$x''-(a_1+b_2)x'+(a_1b_2-b_1a_2)x = r(t), \text{ dengan}$$

$$r(t) = b_1f_2-b_2f_1+f_1'$$

yang merupakan PD tak homogen orde dua.

Soal:

1. Selesaikan sistem PD

   (i). $x'=-2x+y$

   (ii). $y'=-4x+3y+10 \cos t$.

Penyelesaian:

penurunan dari (i) menghasilkan

$$x'' = -2x'+y'$$

$$= -2x'-4x+3y+10 \cos t$$

$$= -2x'-4x+3(x'+2x)+10 \cos t,$$

atau

$$x''-x'-2x = 10 \cos t,$$

yang merupakan PD orde dua takhomogen. Dengan cara seperti pada bagian terdahulu akan diperoleh selesaian

$$x(t) = c_1e^{-t}+c_2e^{2t}-3\cos t-\sin t, \text{ dan}$$

$$y(t) = x'+2x$$

2. Selesaikan sistem PD:

(i). $x'=4x-2y$

(ii). $y'=x+y$.

(Jawaban: $x = c_1e^{3t}+c_2e^{2t}$ dan $y = 1/2c_1e^{3t}+c_2e^{2t}$).

5.3 Metode matriks

Kita dapat juga menyelesaikan suatu sistem PD dengan menggunakan metode matriks. Misal, soal 2 di atas dapat diselesaikan dengan metode matriks:

Jika diambil

$$y_1=x \text{ dan}$$

$$y_2=y$$

maka sistem PD pada soal 2 dapat ditulis dalam bentuk

(1). $$\underline{y}'=\underline{A}\underline{y}, \text{ dengan}$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Jika $\underline{A}$ matriks 1x1 (sebuah bilangan), maka selesaiannya berupa fungsi eksponensial, sehingga dapat diambil

$$\underline{y}=\underline{z}e^{\lambda t}.$$

Dengan substitusi y dan $\underline{y}'=\lambda\underline{z}e^{\lambda t}$ ke dalam (1) akan menghasilkan

$$\lambda\underline{z}e^{\lambda t}=\underline{A}\underline{z}e^{\lambda t} \quad \text{atau}$$

$$\lambda\underline{z}=\underline{A}\underline{z} \quad \text{atau}$$

(2) $$(\underline{A}-\lambda\underline{I})\underline{z} = \underline{0} \quad \text{atau}$$

(3) $$(4-\lambda)z_1-2z_2 = 0$$

$$z_1 + (1-\lambda)z_2 = 0.$$

Dari sini λ dapat dicari.

Persamaan (2) mempunyai selesaian trivial

$$\underline{z} = \underline{0},$$

untuk semua λ.

Tetapi kita menginginkan $\underline{z}\neq\underline{0}$. Karena sistem PD homogen, maka agar ada $\underline{z}\neq\underline{0}$ disyaratkan

$$|\underline{A}-\lambda\underline{I}|=0 \text{ atau}$$

$$(4-\lambda)(1-\lambda)+2=0,$$

sehingga diperoleh

$$\lambda_1=3 \text{ dan}$$

$$\lambda_2=2.$$

Dari persamaan (3),

jika

$$\lambda=3$$

diperoleh

$$z_1=2,\ z_2=1.$$

jika

$$\lambda=2$$

Diperoleh

$$z_1=1,\ z_2=1.$$

Jadi selesaian dari (1) adalah

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} \text{ dan}$$

,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}$$

$$y_1=2a_1e^{3t}+a_2e^{2t}$$

$$y_2=a_1e^{3t}+a_2e^{2t}.$$

Latihan

Selesaikan sistem persamaan differensial :

1. $x' = y$

   $y' = -x$

2. $x' = -3x+2y$

   $y' = x-2y$

3. $x' = 5x+10y$

   $y' = -x-y$

4. $x' = x-2y-z$

   $y' = y$

   $z' = -y+2z$

5. $x' = y-t$

   $y' = -x+\cos t$

6. $x' = -3x+2y-t^2$

$y' = x-2y+e^t$

RINGKASAN BAB V

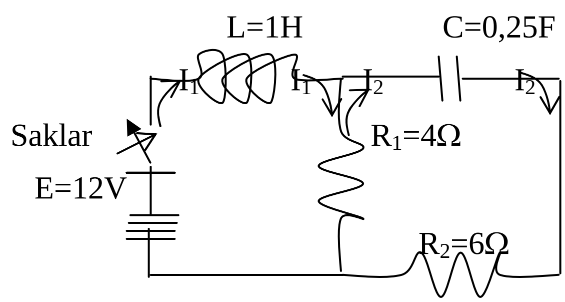
SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL

5.1 Model Sistem Persamaan Differensial

Sistem persamaan differensial sering digunakan untuk menyusun model yang merupakan beberapa kombinasi sistem sederhana.

Contoh:

Besar arus I_1 dan I_2 yang mengalir pada rangkaian tertutup:



diberikan oleh sistem persamaan differensial:

$I_1' + 4I_1 - 4I_2 = 12$ (rangkaian sebelah kiri)

$-4I_1' + 10I_2' + 4I_2 = 0$ (rangkaian sebelah kanan),

5.2 Metode Eliminasi

Sistem PD orde satu:

(i). $x' = a_1x + b_1y + f_1(t)$

(ii). $y' = a_2x + b_2y + f_2(t)$,

dengan f_1 dan f_2 fungsi-fungsi yang diketahui, a_1,a_2,b_1,b_2 konstan, x dan y fungsi-fungsi dari t yang tidak diketahui, dan b_1 dan a_2 tidak bersama-sama nol.

Dengan eliminasi, sistem persamaan tersebut dapat dibawa ke bentuk PD tak homogen orde dua:

$$x''-(a_1+b_2)x'+(a_1b_2-b_1a_2)x = r(t), \text{ dengan}$$

$$r(t) = b_1f_2-b_2f_1+f_1'$$

5.4 Metode matriks

Kita dapat juga menyelesaikan suatu sistem PD dengan menggunakan metode matriks.

Sistem PD:

$$\text{(i).}\ \ x'=4x-2y$$

$$\text{(ii).}\ y'=x+y.$$

dapat ditulis dalam bentuk

$$\underline{y}'=\underline{A}\underline{y},$$

dengan

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ \ \underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Jika $\underline{A}$ matriks 1x1 (sebuah bilangan), maka selesaiannya berupa fungsi eksponensial, sehingga dapat diambil

$$\underline{y}=\underline{z}e^{\lambda t}.$$

Dengan substitusi y dan $\underline{y}'=\lambda\underline{z}e^{\lambda t}$ ke dalam (1) akan menghasilkan

$$\lambda\underline{z}e^{\lambda t}=\underline{A}\underline{z}e^{\lambda t} \quad \text{atau}$$

$$\lambda\underline{z}=\underline{A}\underline{z} \text{ atau}$$

$$(\underline{A}-\lambda\underline{I})\underline{z}=\underline{0} \text{ atau}$$

$$(4-\lambda)z_1-2z_2=0$$

$$z_1+(1-\lambda)z_2=0.$$

Dari sini λ dapat dicari.

Karena sistem PD homogen, maka agar ada $\underline{z}\neq\underline{0}$ disyaratkan

$$|\underline{A}-\lambda\underline{I}|=0 \text{ atau}$$

$$(4-\lambda)(1-\lambda)+2=0,$$

sehingga diperoleh

$$\lambda_1=3 \text{ dan } \lambda_2=2.$$

Jika $\lambda=3$, diperoleh $z_1=2$, $z_2=1$.

Jika $\lambda=2$, diperoleh $z_1=1$, $z_2=1$.

Jadi selesaiannya adalah

$$\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}e^{3t} \text{ dan } \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}e^{2t},$$

atau

$$y_1=2a_1e^{3t}+a_2e^{2t}$$

$$y_2=a_1e^{3t}+a_2e^{2t}.$$