BAB IV

PERSAMAAN TAKHOMOGEN

Kompetensi

Mahasiswa mampu

1. Menentukan selesaian khusus PD tak homogen dengan metode koefisien tak tentu
2. Menentukan selesaian khusus PD tak homogen dengan metode variasi parameter.
3. Menerapkan konsep selesaian khusus dalam persamaan differensial untuk menyelesaikan permasalahan nyata yang berkaitan.

Materi

1. Konsep Persamaan Takhomogen
2. Selesaian Khusus Persamaan takhomogen: Penyelesaian dengan Metode Koefisien tak Tentu
3. Aturan-aturan untuk Metode Koefisien tak Tentu
4. Selesaian Khusus Persamaan Takhomogen: Penyelesaian Dengan Metode Variasi Parameter

BAB IV

PERSAMAAN TAKHOMOGEN

4.1. Konsep Persamaan Takhomogen

Persamaan linier takhomogen orde n mempunyai bentuk

(1) $$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = r(x),$$

Dengan $r(x)\neq 0$. Untuk menyelesaian (1) terlebih dahulu harus diselesaikan PD homogen yang bersesuaian dengan (1), yaitu

(2) $$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0.$$

Hubungan antara selesaian persamaan (1) dan (2) diberikan oleh teorema berikut.

Teorema 1 [Hubungan antara selesaian persamaan (1) dan (2)]

(a) Selisih dari dua buah selesaian dari (1) pada suatu interval buka I adalah suatu selsaian dari (2) pada I.

(b) Jumlah dari suatu selesaian dari (1) pada I dan suatu selesaian dari (2) pada I adalah suatu selsaian dari (1) pada I.

Keadaan ini menjadikan kita untuk memperkenalkan konsep-konsep berikut

Suatu **selesaian umum** dari PD takhomogen (1) pada suatu interval buka I adalah suatu selesaian yang berbentuk

(3) $$y(x) = y_h(x) + y_p(x),$$

di mana

$$y_h(x) = c_1y_1(x) + \dots + c_ny_n(x)$$

adalah suatu selesaian umum dari PD homogen (2) pada I dan y_p adalah suatu selesaian dari (1) yang tidak memuat konstan sebarang.

Suatu **selesaian khusus** dari (1) pada I adalah suatu selesaian yang diperoleh dari (3) dengan memberikan nilai-nilai yang khusus untuk konstan-konstan sebarang $c_1, \dots, c_n$ dalam $y_h(x)$.

Jika koefisien-koefisien dalam (1) dan r(x) adalah fungsi-fungsi kontinu pada I, maka (1) mempunyai selesaian umum pada I; suatu MNA yang terdiri dari (1) dan n buah syarat awal (5) pada pasal 2.9, mempunyai suatu selesaian tunggal pada I.

Lebih lanjut, suatu selesaian umum dari (1) memuat semua selesaian dari (1).

Teorema 2 (Selesaian umum)

Misal koefisien-koefisien dan r(x) dalam (1) adalah kontinu pada suatu interval buka I. maka setiap selesaian dari (1) pada I diperoleh dengan memberikan nilai-nilai yang sesuai untuk konstan-konstan sebarang yang terdapat dalam selesaian umum (3) dari (1) pada I.

Kesimpulan praktis

Untuk menyelesaikan PD takhomogen (1) atau suatu MNA untuk (1), kita harus menyelesaikan PD homogen (2) dan menemukan suatu selesaian khusus y_p dari (1). Metode dan penerapannya akan dipelajari kemudian.

Contoh 1. PD takhomogen

Selesaikan PD takhomogen

$$y'' - 4y' + 3y = 10e^{-2x}.$$

Penyelesaian.

Persamaan karakteristik

$$\lambda^2-4\lambda+3=0$$

mempunyai akar-akar 1 dan 3.

Jadi selesaian umum dari PD homogennya adalah

$$y_h=c_1e^x+c_2e^{3x}.$$

Kita memerlukan suatu selesaian khusus y_p dari PD takhomogennya. Karena e^{-2x} mempunyai turunan e^{-2x} dikalikan suatu konstan, kita mencoba

$$y_p = ke^{-2x}.$$

Maka

$$y_p' = -2ke^{-2x} \text{ dan}$$

$$y_p'' = 4ke^{-2x}.$$

Substitusi ke dalam PD takhomogennya akan menghasilkan

$$4ke^{-2x} + 4ke^{-2x} + 3ke^{-2x} = 10e^{-2x}.$$

Jadi

$$4k+8k+3k = 10,$$

sehingga

$$k = 2//3.$$

Dengan demikian selesaian umum PD takhomogennya adalah

$$y = y_h + y_p = c_1e^x + c_2e^{3x} + (2/3)e^{-2x}.$$

Contoh 2. MNA

Selesaikan MNA

$$y'''-2y''-y'+2y = 2x^2-6x+4, \quad y(0)=5, y'(0)=-5, y''(0)=1.$$

Penyelesaian.

Selesaian umum PD homogennya adalah

$$y_h = c_1e^{-x}+c_2e^{x}+c_3e^{2x}.$$

Untuk menentukan selesaian khususnya, dengan memperhatikan ruas kanan, dicoba bentuk

$$y_p = Kx^2+Mx+N.$$

Maka

$$y_p' = 2Kx+M,$$

$$y_p'' = 2K,$$

$$y_p''' = 0.$$

Substitusi ke dalam PD takhomogennya menghasilkan

$$-2.2K - (2Kx+M) + 2(Kx^2+Mx+N) = 2x^2-6x+4.$$

Dengan menyamakan unsur-unsur yang mempunyai pangkat yang sama, diperoleh

$$2Kx^2 = 2x^2,$$

$$(-2K+2M)x = -6x,$$

$$-4K-M+2N = 4.$$

Jadi

$$K=1,$$

$$M=-2,$$

$$N=3.$$

Dengan demikian selesaian umum PD takhomogennya adalah

$$y = y_h + y_p = c_1e^{-x}+c_2e^{x}+c_3e^{2x}+x^2-2x+3.$$

Untuk menentukan nilai-nilai dari konstan yang memenuhi syarat batas ditentukan dahulu turunan-turunan

$$y' = -c_1e^{-x}+c_2e^{x}+2c_3e^{2x}+2x-2$$

$$y'' = c_1e^{-x}+c_2e^{x}+4c_3e^{2x}+2.$$

Dengan mengambil $x=0$ dan syarat-syarat batasnya, diperoleh

(a) $y(0) = c_1+c_2+c_3+3 = 5,$

(b) $y'(0) = -c_1+c_2+2c_3-2 = -5,$

(c) $y''(0) = c_1+c_2+4c_3+2 = 1.$

Dengan menyelesaikan sistem persamaan (a), (b) dan (c) dihasilkan

$c_1=2,$

$c_2=1$, dan

$c_3=-1.$

Jadi selesaian MNA-nya adalah

$$y = 2e^{-x}+e^{x}-e^{2x}+x^2-2x+3.$$

Latihan 4.1

Tunjukkan bahwa y_p merupakan suatu selesaian PD yang diberikan dan tentukan selesaian umumnya.

1. $y''+3y'+2y = 2x^2$, $y_p = x^2-3x+3,5$
2. $y''+y = -20\cancel{x}\sin 3x$, $y_p = 2,5\sin 3x.$
3. $(D^2+3D-4)y = 10e^x$, $y_p = 2xe^x$

Periksa bahwa y_p adalah selesaian dari PD yang diberikan dan selesaiakan MNA-nya

4. $(D^2+1)y = 2\sin x$, $y_p = -x\cos x$, $y(\pi/2)=1$, $y'(\pi/2)= \pi/2.$
5. $(x^2D^2-3xD+3)y = 3\ln x-4$, $y_p = \ln x$, $y(1)=0$, $y'(1)=1.$

4.2 Selesaian Khusus Persamaan takhomogen: Penyelesaian dengan Metode Koefisien tak Tentu

Selesaian umum dari PD linier takhomogen merupakan jumlah yang berbentuk $y = y_h + y_p$, di mana y_h adalah selesaian umum PD homogen yang bersesuaian dan y_p adalah suatu selesaian khusus dari PD takhomogennya.Akan dibicarakan metode-metode untuk menemukan selesaian khusus tersebut. Meskipun ada metode yang selalu dapat diterapkan untuk situasi umum, dalam pasal ini dibicarakan metode yang khusus digunakan untuk persamaan dengan koefisien konstan dan ruas kanannya berbentuk fungsi eksponensial. Metode ini disebut **metode koefisien tak tentu**. Pertama-tama metode ini diterapkan untuk persamaan orde dua yang berbentuk

(4) $\qquad y'' + ay' + by = r(x),$

tetapi untuk selanjutnya metode ini berlaku juga untuk orde yang lebih tinggi.

Yang menjadi kunci dalam metode ini adalah menganggap bahwa y_p mempunyai ekspresi yang mirip dengan r(x), yang melibatkan koefisien-koefisien yang tidak diketahui yang harus ditentukan dengan mensubstitusikan y_p dalam persamaannya. Hal ini mestinya berlaku untuk fungsi-fungsi r(x) yang turunan-turunannya mempunyai bentuk yang mirip dengan r(x) sendiri, yang dalam hal ini berupa fungsi-fungsi eksponensial. Seperti yang sudah dikerjakan dalam contoh di atas.

4.3 Aturan-aturan untuk Metode Koefisien tak Tentu

(A) ***Aturan dasar.*** *Jika r(x) dalam (4) adalah salah satu dari fungsi yang ada dalam Tabel 4.1, pilihlah fungsi y_p yang bersesuaian dalam kolom ke dua dan tentukan koefisien tak tentunya dengan mensubstitusikan y_p dan turunan-turunannya dalam (4).*

(B) ***Aturan Modifikasi.*** *Jika r(x) adalah suatu selesaian dari PD homogen yang bersesuaian dengan (4), maka kalikan* y_p *yang dipilih dengan x (atau* x^2 *jika selesaian ini bersesuaian dengan akar ganda dari persamaan karakteristik persamaan homogennya).*

(C) ***Aturan Penjumlahan.*** *Jika r(x) adalah jumlah dari fungsi-fungsi yang terdapat dalam Tabel 4.1, pada kolom pertama, maka pilihlah* y_p *sebagai jumlah fungsi-fungsi pada kolom ke dua yang bersesuaian.*

Tabel 4.1. Metode Koefisien tak tentu

Suku-suku dalam r(x)	Pilihan untuk y_p
$ke^{\gamma x}$	$Ce^{\gamma x}$
Kx^n (n=0,1,…)	$K_nx^n+K_{n-1}x^{n-1}+\ldots+K_1x+K_0$
$k\cos \omega x$ atau $k\sin\omega x$	$K\cos\omega x+M\sin\omega x$

Contoh 3. Penerapan Aturan (A)

Selesaikan PD takhomogen

(5) $$y''+4y = 8x^2$$

Penyelesaian.

Dengan menggunakan Tabel 2.1 kita pilih

$$y_p = K_2x^2+K_1x+K_0, \text{ sehingga}$$

$$y_p'' = 2K_2.$$

Substitusi menghasilkan

$$2K_2+4(K_2x^2+K_1x+K_0) = 8x^2.$$

Dengan menyamakan koefisien-koefisien yang berpangkat sama, diperoleh

$$4K_2=8,$$

$$4K_1=0,$$

$$2K_2+4K_0=0.$$

Jadi

$$K_2=2,$$

$$K_1=0,$$

$$K_0=-1.$$

Sehingga

$$y_p = 2x^2-1,$$

dan selesaian umum dari (2) adalah

$$\begin{aligned} Y &= y_h+y_p \\ &= A\cos 2x+B\sin 2x+2x^2-1. \end{aligned}$$

Contoh 4. Modifikasi Aturan (B) dalam kasus akar sederhana

Selesaikan

(6) $$y''-3y'+2y = e^x.$$

Penyelesaian.

Persamaan karakteristik

$$\lambda^2-3\lambda+2 = 0$$

mempunyai akar-akar 1 dan 2. Jadi

$$y_h = c_1e^x+c_2e^{2x}.$$

Seharusnya, menurut aturan (B) kita pilih

$$y_p=Ce^x.$$

Tetapi kita mengetahui bahwa

$$r(x)=e^x$$

adalah suatu selesaian PD homogen yang bersesuaian untuk akar sederhana (katakan, 1). Jadi aturan (B) menyarankan

$$y_p =Cxe^x.$$

Kita hitung

$$y_p'=C(e^x+xe^x) \text{ dan}$$

$$y_p''=C(2e^x+xe^x).$$

Subsitusi ke dalam persamaan (3) menghasilkan

$$C(2+x)e^x-3C(1+x)e^x+2Cxe^x = e^x.$$

Sehingga diperoleh C =-1, dan selesaian umumnya adalah

$$y = c_1e^x+c_2e^{2x}-xe^x.$$

Contoh 5. Modifikasi Aturan (akar ganda) dan Aturan Penjumlahan

Selesaikan

(7) $$y''-2y'+y = (D-1)^2y = e^x+x.$$

Penyelesaian.

Persamaan karakteristiknya mempunyai akar ganda $\lambda=1$. Jadi

$$y_h=(c_1+c_2x)e^x.$$

Dengan Tabel 4.1., adanya suku x di ruas kanan mengindikasikan pemilihan selesaian khusus

$$y_p = K_1x+K_0.$$

Karena 1 adalah akar ganda dari persamaan karakteristik

$$(\lambda-1)^2=0,$$

dengan aturan modifikasi suku e^x mengindikasikan pemilihan selesaian khusus berbentuk

$$Cx^2e^x \qquad \text{(bukan } Ce^x\text{)}.$$

Jadi, selesaian khusus yang dipilih adalah

$$y_p = K_1x+K_0+Cx^2e^x.$$

Jika disubstitusikan dalan persamaan (7) akan diperoleh

$$y''-2y_p'+y_p = 2Ce^x+K_1x -2K_1+K_0$$

$$= e^x+x.$$

Sehingga diperoleh

$$C =1/2,$$

$$K_1=1,$$

$$K_0=2,$$

dan selesaian umum dari (7) adalah

$$y = y_h+y_p = (c_1+c_2x)e^x+x+2.$$

Contoh 6. Penerapan Aturan Jumlah

Selesaikan

(8) $$y''+2y'+5y = 16e^x+\sin 2x.$$

Penyelesaian.

Persamaan karakteristik

$$\lambda^2+2\lambda+5=0$$

mempunyai akar-akar

$$-1+2i \text{ dan}$$

$$-1-2i.$$

Jadi

$$y_h = e^{-x}(A\cos 2x+B\sin 2x).$$

Menurut tabel 4.1., dipilih

$$y_p = ce^x+K\cos 2x+M\sin 2x.$$

Dengan substitusi y_p dan turunan-turunannya ke dalam (8) diperoleh kesamaan

$$8Ce^x+(-4K+4M+5K)\cos 2x+(-4K-4M+5M)\sin 2x = 16e^x+\sin 2x,$$

sehingga diperoleh

$$C = 2,$$

$$K=-4/17,$$

$$M=1/17.$$

Dengan demikian selesaian umumnya adalah

$$y = e^{-x}(A\cos 2x+B\cos 2x) + 2e^x - 1/17(4\cos 2x-\sin 2x).$$

Latihan 4.3

Tentukan selesaian khusus PD

1. $y''+y = x^2+x$

2. $y''+y'-6y=52\cos 2x$

Tentukan selesaian umum PD

3. $y''-4y'+3y=e^{3x}$

4. $y''' - y'' - 4y' + 4y = 6e^{-x}$

Selesaikan MNA

5. $y'' + 25y = 5x$, $y(0)=5, y'(0)=-4,8$

6. $(D^2+2D+10)y = 10x^2+4x+2$, $y(0)=1$, $y'(0)=-1$.

4.4 Selesaian Khusus Persamaan Takhomogen: Penyelesaian Dengan Metode Variasi Parameter

Metode variasi parameter adalah metode yang dapat digunakan untuk menentukan selesaian khusus PD linier takhomogen dengan koefisien variabel, sehingga lebih umum daripada metode koefisien tak tentu.

Perhatikan PD linier orde 2 yang mempunyai bentuk

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x), \tag{9}$$

dengan p, q, dan r fungsi-fungsi kontinu pada suatu interval buka I. Kita akan menentukan selesaian khusus dari (9) dengan metode variasi parameter seperti berikut. Kita mengetahui bahwa PD homogen yang bersesuaian, yaitu

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{10}$$

mempunyai suatu selesaian umum $y_h(x)$ pada I yang berbentuk

$$y_h(x) = c_1y_1(x)+c_2y_2(x).$$

Metode variasi parameter terdiri dari penggantian c_1 dan c_2 dengan fungsi u(x) dan v(x) yang akan ditentukan sedemikian hingga fungsi penggantinya, yaitu

$$y_p(x) = u(x)y_1(x)+v(x)y_2(x) \tag{11}$$

merupakan selesaian khusus dari (9) pada I. dengan menurunkan (11) diperoleh

$$y_p' = u'y_1+uy_1'+v'y_2+vy_2'.$$

Persamaan (11) memuat dua fungsi u dan v, tetapi syarat bahwa y_p memenuhi (9) mengakibatkan bahwa hanya ada satu syarat pada u dan v. Karena itu kita bisa menerapkan kondisi (syarat) sebarang yang ke dua. Perhitungan berikut akan menunjukkan bahwa kita dapat menentukan u dan v sedemikian hingga y_p memenuhi (9) dan u dan v memenuhi, sebagai syarat ke dua, hubungan:

(12) $$u'y_1+v'y_2 = 0.$$

Ini mereduksi ekspresi untuk y_p' ke bentuk

(13) $$y_p' = uy_1'+vy_2'.$$

Dengan menurunkan fungsi ini diperoleh

(14) $$y_p'' = u'y_1'+uy_1''+v'y_2'+vy_2''.$$

Dengan mensubstitusikan (11), (13) dan (14) ke dalam (9) dan mengumpulkan suku-suku yang memuat u dan v akan diperoleh

$$u(y_1''+py_1'+qy_1)+v(y_2''+py_2'+qy_2)+u'y_1'+v'y_2' = r.$$

Karena y_1 dan y_2 selesaian dari PD homogen (10), maka persamaan di atas mereduksi ke bentuk

$$\text{(i).}\quad u'y_1'+v'y_2' = r.$$

$$\text{(ii)}\quad u'y_1+v'y_2 = 0.$$

Persamaan (i) dan (ii) merupakan sistem dua persamaan aljabar linier dari fungsi-fungsi u' dan v' yang tidak diketahui. Selesaian diperoleh dengan aturan Cramer:

(15) $$u' = -\frac{y_2 r}{W}, \qquad v' = \frac{y_1 r}{W},$$

di mana

$$W = y_1y_2' - y_1'y_2$$

adalah Wronski dari dari y_1 dan y_2. Jelas bahwa $W \neq 0$ karena y_1, y_2 membangun basis selesaian. Pengintegralan (15) menghasilkan

$$u = -\int \frac{y_2 r}{W} dx, \qquad v = \int \frac{y_1 r}{W} dx.$$

Integral ini ada karena r(x) kontinu. Substitusikan ekspresi untuk u dan v ini ke dalam (11), untuk memperoleh selesaian dari (9),

$$y_p(x) = -y_1 \int \frac{y_2 r}{W} dx + y_2 \int \frac{y_1 r}{W} dx. \tag{16}$$

Catatan.

Jika konstanta pengintegralan dalam (16) dibiarkan sebarang, maka (16) menyatakan selesaian umum dari (9). Perlu diperhatikan bahwa sebelum rumus (16) digunakan, persamaannya harus ditulis dulu dalam bentuk standar (9), dengan y" sebagai suku pertama; bagilah dengan h(x) jika persamaan dimulai dengan bentuk h(x)y".

Contoh 7.

Selesaikan PD

$$y'' + y = \sec x. \tag{17}$$

Penyelesaian.

Metode koefisien tak tentu (pasal 4.3) tidak dapat digunakan. Fungsi-fungsi

$$y_1 = \cos x,$$

$$y_2 = \sin x$$

membentuk basis selesaian PD homogennya. Wronski-nya adalah

$$W(y_1, y_2) = \cos x \cos x - (-\sin x)\sin x$$

$$= 1.$$

Dari (16), diperoleh selesaian khusus dari (17):

$$y_p = -\cos x \int \sin x \sec x \, dx + \sin x \int \cos x \sec x \, dx$$

$$= \cos x \ln|\cos x| + x \sin x.$$

Selesaian umum yang bersesuaian dengan PD (17) adalah

$$y = y_h + y_p$$

$$= [c_1 + \ln|\cos x|]\cos x + (c_2 + x)\sin x.$$

Latihan 4.4

Tentukan selesaian umum PD

1. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}/x$

2. $y'' - 2y' + y = e^x \sin x$

3. $(D^2 - 4D + 4)y = 6x^{-4}e^{2x}$.

Selesaikan persamaan takhomogen Euler-Cauchy

4. $x^2y'' + xy' - y = 4$

5. $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^4$

6. $(x^2D^2 - xD)y = 2x^3e^x$

RINGKASAN BAB IV

PERSAMAAN TAKHOMOGEN

4.1. Konsep Persamaan Takhomogen

Persamaan linier takhomogen orde n mempunyai bentuk

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = r(x),$$

Dengan $r(x) \neq 0$.

PD homogen yang bersesuaian dengan PD di atas adalah:

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0.$$

Teorema 1 [Hubungan antara selesaian persamaan nonhomogen dan persamaan homogennya]

(a) Selisih dari dua buah selesaian dari persamaan nonhomogen pada suatu interval buka I adalah suatu selesaian dari persamaan homogen yang berkaitan pada I.

(b) Jumlah dari suatu selesaian persamaan nonhomogen pada I dan suatu selesaian persamaan homogen yang berkaitan pada I adalah suatu seelsaian dari persamaan nonhomogen pada I.

Selesaian umum dari PD takhomogen pada suatu interval buka I berbentuk

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x),$$

di mana

$$y_h(x) = c_1y_1(x) + \dots + c_ny_n(x)$$

adalah suatu selesaian umum dari PD homogen yang berkaitan pada I dan y_p adalah suatu selesaian khusus dari persamaan nonhomogen.

Teorema 2 (Selesaian umum)

Misal koefisien-koefisien dan r(x) dalam suatu persamaan nonhomogen adalah kontinu pada suatu interval buka I. maka setiap selesaian pada I dapat diperoleh dengan memberikan nilai-nilai yang sesuai untuk konstan-konstan sebarang yang terdapat dalam selesaian umumnya.

4.2 Selesaian Khusus Persamaan takhomogen: Penyelesaian dengan Metode Koefisien tak Tentu

Selesaian umum dari PD linier takhomogen merupakan jumlah yang berbentuk $y = y_h + y_p$, di mana y_h adalah selesaian umum PD homogen yang bersesuaian dan y_p adalah suatu selesaian khusus dari PD takhomogennya.

4.3 Aturan-aturan untuk Metode Koefisien tak Tentu untuk PD berbentuk $y'' + ay' + by = r(x)$:

(A) ***Aturan dasar.*** *Jika r(x) dalam PD di atas adalah salah satu dari fungsi yang ada dalam Tabel 4.1, pilihlah fungsi y_p yang bersesuaian dalam kolom ke dua dan tentukan koefisien tak tentunya dengan mensubstitusikan y_p dan turunan-turunannya dalam PD nonhomogennya.*

(B) ***Aturan Modifikasi.*** *Jika r(x) adalah suatu selesaian dari PD homogen yang bersesuaian, maka kalikan y_p yang dipilih dengan x (atau x^2 jika selesaian ini bersesuaian dengan akar ganda dari persamaan karakteristik persamaan homogennya).*

(C) ***Aturan Penjumlahan.*** *Jika r(x) adalah jumlah dari fungsi-fungsi yang terdapat dalam Tabel 4.1, pada kolom pertama, maka pilihlah y_p sebagai jumlah fungsi-fungsi pada kolom ke dua yang bersesuaian.*

Tabel 4.1. Metode Koefisien tak tentu

Suku-suku dalam r(x)	Pilihan untuk y_p
$ke^{\gamma x}$	$Ce^{\gamma x}$
Kx^n (n=0,1,…)	$K_n x^n + K_{n-1}x^{n-1} + \ldots + K_1 x + K_0$
$k\cos \omega x$ atau $k\sin\omega x$	$K\cos\omega x + M\sin\omega x$

4.4 Selesaian Khusus Persamaan Takhomogen: Penyelesaian Dengan Metode Variasi Parameter

Metode variasi parameter dapat digunakan untuk menentukan selesaian khusus PD linier takhomogen dengan koefisien variabel, atau PD linier takhomogen dengan ruas kanan merupakan fungsi x sebarang, sehingga lebih umum daripada metode koefisien tak tentu.

Penerapan Metode Variasi Parameteruntuk PD linier orde 2 yang mempunyai bentuk

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x),$$

dengan p, q, dan r fungsi-fungsi kontinu pada suatu interval buka I., akan menghasilkan

$$y_p(x) = -y_1 \int \frac{y_2 r}{W} dx + y_2 \int \frac{y_1 r}{W} dx.$$

dimana W adalah Wronski dari y_1 dan y_2.