BAB III

PD LINIER HOMOGEN

Kompetensi

Mahasiswa diharapkan

1. Mampu menentukan selesaian umum dari PD linier homogen orde dua dengan jenis akar-akar karakteristik yang berbeda-beda
2. Memahami pengertian kebebaslinieran dari dua buah selesaian
3. Dapat menentukan basis dari selesaian yang akan membangun selesaian umum.
4. Dapat mengubah PD linier yang dinyatakan dalam bentuk operator diferensial

Materi

1. PD Linier Homogen Orde Dua
2. PD Homogen dengan Koefisien Konstan.
3. Selesaian Umum dan Basis.
4. Akar Real, Komplek, Ganda dan Persamaan Karakteristik
5. Operator Differensial
6. Persamaan Euler-Cauchy
7. Eksistensi dan Ketunggalan Selesaian
8. Persamaan Linier Homogen Orde n
9. Persamaan Orde n dengan Koefisien Konstan

BAB III

PD LINIER HOMOGEN

PD biasa dapat digolongkan dalam dua kelas besar, yaitu PD linier dan PD taklinier. Dibandingkan dengan jenis yang kedua, selesaian PD linier jauh lebih mudah ditentukan karena sifat-sifat selesaiannya dapat dikarakterisasikan dalam suatu cara yang umum dan metode baku tersedia untuk penyelesaian persamaan-persamaan ini. PD linier juga berperan penting dalam matematika teknik seperti getaran mekanika dan sirkuit listrik dan jaringan. Menurut bentuk persamaannya, suatu persamaan differensial linier dapat dibedakan menjadi dua yakni homogen dan nonhomogen. Sedang menurut ordenya dapat dibedakan menjadi orde satu, orde dua dan orde banyak (orde n, dengan $n>2$).

3.1 PD Linier Homogen Orde Dua

Suatu PD linier orde dua mempunyai bentuk:

(1) $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$.

PD di atas dikatakan linier karena berbentuk linier dalam fungsi y yang tidak diketahui dan turunan-turunannya, sementara p, q, dan r adalah fungsi-fungsi dari x yang diketahui. Jika suku pertama PD itu berbentuk $f(x)y''$, maka kita bisa membaginya dengan $f(x)$ sehingga diperoleh bentuk baku seperti (1), dengan suku pertamanya adalah y''.

Jika $r(x) \equiv 0$ (yaitu $r(x)=0$ untuk semua x dalam domainnya), maka (1) menjadi

(2) $y''+p(x)y'+q(x)y = 0$,

dan disebut PD homogen orde dua.

Jika $r(x) \neq 0$ maka disebut PD linier takhomogen orde dua.

Sebagai contoh

$$y''+ 4y = e^{-x}\sin x$$

adalah PD linier takhomogen, sedangkan

$$(1-x^2)y''-2xy'+6y = 0$$

adalah PD linier homogen.

Fungsi p dan q disebut *koefisien* persamaan.

Suatu PD orde dua yang tidak bisa dituliskan dalam bentuk (1) disebut PD taklinier. Sebagai contoh, PD:

$$y''y+y' = 0$$

dan

$$y'' = \sqrt{y'^2+1}.$$

Konsep Selesaian. Prinsip superposisi

Suatu fungsi

$$y = \phi(x)$$

disebut suatu selesaian dari PD (linier atau taklinier) orde dua pada suatu interval, jika $\phi(x)$ beserta turunan pertama dan turunan keduanya terdefinisikan di seluruh interval itu sedemikian hingga persamaan itu menjadi suatu identitas jika fungsi y dan turunan-turunannya yang tidak diketahui diganti dengan ϕ dan turunan-turunan yang bersesuaian.

Contoh 1.

Fungsi-fungsi

$$y = \cos x \text{ dan}$$

$$y=\sin x$$

adalah selesaian PD linier homogen

$$y'' + y = 0 \text{ untuk semua } x,$$

karena jika y diganti dengan cosx akan diperoleh suatu identitas

$$(\cos x)'' + \cos x = -\cos x + \cos x = 0.$$

Demikian juga jika y diganti dengan sin x. Lebih lanjut, jika masing-masing fungsi itu dikalikan dengan konstan-konstan tertentu dan dijumlahkan, maka hasilnya juga merupakan suatu selesaian dari PD di atas.

Misal diambil konstan-konstan 3 dan –2, maka diperoleh fungsi

$$y = 3\cos x - 2\sin x,$$

jika disubtitusikan dalam PD-nya diperoleh

$$(3\cos x - 2\sin x)'' + (3\cos x - 2\sin x) = 3((\cos x)'' + \cos x) - 2((\sin x)'' + \sin x)$$

$$= 3.0 - 2.0$$

$$= 0.$$

Suatu ekspresi yang berbentuk

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

disebut kombinasi linier dari y_1 dan y_2.

Contoh di atas merupakan suatu ilustrasi dari teorema berikut:

Teorema Dasar 1 untuk PD homogen (2)

Jika suatu selesaian PD linier homogen (2) pada suatu interval I dikalikan dengan suatu konstan, maka hasilnya juga merupakan suatu selesaian (2) pada interval I. Jumlah dua selesaian dari (2) pada interval I juga merupakan selesaian (2) pada interval yang sama. Suatu kombinasi linier dari selesaian-selesaian (2) pada interval I juga meripakan selesaian (2) pada interval yang sama.

Perhatian!

Teorema di atas hanya berlaku untuk PD linier homogen, tidak berlaku untuk PD linier takhomogen dan PD taklinier. Sebagai contoh:

Fungsi-fungsi

$$y = 1 + \cos x \text{ dan}$$

$$y = 1 + \sin x$$

adalah selesaian PD takhomogen

$$y'' + y = 1,$$

tetapi

$$2(1 + \cos x) \text{ dan } (1 + \cos x) + (1 + \sin x)$$

keduanya bukan selesaian PD tersebut.

Fungsi-fungsi

$$y=x^2 \text{ dan } y=1$$

adalah selesaian dari PD taklinier

$$y''y-xy'=0,$$

tetapi fungsi-fungsi

$$-x^2 \text{ dan } x^2+1$$

keduanya bukan selesaian PD itu.

Catatan.

(i). Jika dalam suatu PD orde dua, variabel tak bebas y tidak muncul secara eksplisit, sehingga persamaan berbentuk $F(x,y',y'')=0$, maka persaman itu bisa diubah menjadi PD orde satu (yaitu dengan substitusi $y'=z$).

(ii). Jika dalam suatu PD orde dua, variabel bebas x tidak muncul secara eksplisit, sehingga persamaan berbentuk $F(y,y',y'')=0$, maka persaman itu bisa diubah menjadi PD orde satu (yaitu dengan substitusi $z=y'$, sehingga y menjadi variabel bebas dalam PD orde satu yang baru).

Latihan 3.1

Gunakan (i) untuk mengubah menjadi PD orde satu:

1. $y''=y'\tanh x$
2. $y''=y'$
3. $xy''+y'=y'^2$

Gunakan (ii) untuk mengubah menjadi PD orde satu:

4. $yy''=2y'^2$
5. $y''+e^y y'^3=0$
6. $y''+y'^3\cos y=0$

3.2 PD Homogen dengan Koefisien Konstan.

PD linier orde dua homogen dengan koefisien konstan mempunyai bentuk umum

$$(3) \qquad y'' + ay' + by = 0,$$

dengan a dan b konstan real.

Untuk menentukan selesaian (3), kita ingat kembali bahwa selesaian PD linier homogen orde satu dengan koefisien konstan

$$y' + ky = 0$$

adalah suatu fungsi eksponensial, katakan

$$y = ce^{-kx}.$$

Karena itu kita menduga bahwa

$$(4) \qquad y = e^{\lambda x}$$

mungkin merupakan suatu selesaian PD (3) jika λ dipilih secara tepat.

Dengan memasukkan fungsi (4) dan turunan-turunannya, yaitu

$$y' = \lambda e^{\lambda x} \text{ dan } y'' = \lambda^2 e^{\lambda x},$$

ke dalam persamaan (3), diperoleh

$$(\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda x} = 0.$$

Jadi (4) adalah suatu selesaian dari (3), jika λ adalah suatu selesaian dari persamaan kuadrat

$$(5) \qquad \lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

Persamaan (5) disebut persamaan karakteristik (bantu) dari (3). Akar-akar dari (5) adalah

$$(6) \qquad \lambda_1 = \frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2 - 4b}\right), \quad \text{dan} \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}\left(-a - \sqrt{a^2 - 4b}\right).$$

Dengan penurunan diperoleh bahwa fungsi-fungsi

$$(7) \qquad y_1 = e^{\lambda_1 x} \qquad \text{dan} \qquad y_2 = e^{\lambda_2 x}$$

adalah selesaian dari (3). Pemeriksaan dapat dilakukan dengan substitusi (7) dalam (3).

Dari aljabar kita tahu bahwa karena a dan b real, persamaan karakteristiknya mungkin mempunyai

(Kasus I) dua akar real berbeda

(Kasus II) dua akar komplek sekawan

(Kasus III) dua akar real yang sama.

Kasus-kasus di atas akan dibicarakan secara detil dalam pasal 3.4.

Contoh 2. Akar-akar real berbeda

Tentukan selesaian persamaan

$$y''+y'-2y = 0.$$

Penyelesaian.

Persamaan karakteristiknya adalah

$$\lambda^2+\lambda-2 = 0.$$

Akar-akarnya adalah 1 dan –2, sehingga selesaiannya adalah

$$y_1=e^x \text{ dan } y_2=e^{-2x}.$$

Contoh 3. Akar komplek sekawan

Tentukan selesaian persamaan

(8) $y''+y = 0.$

Penyelesaian.

Persamaan karakteristiknya adalah

$$\lambda^2+1 = 0.$$

Akar-akarnya adalah i ($=\sqrt{-1}$) dan –i, sehingga selesaiannya adalah

$$y_1=e^{ix} \text{ dan } y_2=e^{-ix}.$$

Dalam bagian berikutnya akan dibahas cara memperoleh selesaian real dari selesaian komplek. Bisa diperiksa bahwa cosx dan sinx adalah selesaian dari (8).

Contoh 4. Dua akar real sama

Tentukan selesaian persamaan

$$y''-2y'+y = 0.$$

Penyelesaian.

Persamaan karakteristikya adalah

$$\lambda^2-2\lambda+1 = 0,$$

yang mempunyai dua akar sama yaitu 1. Jadi selesaiannya adalah

$$y_1 = e^x.$$

Masalah dua akar sama akan dibahas dalam pasal 3.4. Bisa diperiksa bahwa

$$y_2 = xe^x$$

juga merupakan selesaian dari PD di atas.

Latihan 3.2

Tentukan selesaian persamaan berikut

1. $y''-y = 0$

2. $8y''+2y'-y = 0$

3. $y''+4y'+5y = 0$

4. Tentukan selesaian $y''+4y' = 0$,

(a) dengan metode yang ada

(b) dengan reduksi ke persamaan orde satu.

Carilah PD yang selesaiannya seperti berikut ini dan periksa kembali dengan melakukan substitusi fungsi ke dalam persamaannya.

5. $e^{(-1+2i)x}$, $e^{(-1-2i)x}$

6. 1, e^{2x}

7. e^{kx}, e^{lx}

Kunci Jawaban Latihan 3.2

1. $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$

3. $y_1 = e^{(-2+i)x}$, $y_2 = e^{(-2-i)x}$

5. $y''+2y'+5y = 0$

7. $y''- (k+l)y'+kly = 0.$

3.3 Selesaian Umum dan Basis.

Masalah nilai awal

Sementara perhatian kita ditujukan pada PD linier homogen orde dua.

Dalam pasal ini kita perhatikan persamaan

(9) $$y''+p(x)y'+q(x)y = 0$$

dan kita berkenalan dengan konsep selesaian umum dari persamaan itu. Selesaian umum akan menjadi penting dalam seluruh bab ini. Bentuk persamaan dengan koefisien konstan akan didiskusikan dalam pasal berikut.

Definisi (Selesaian umum, basis, selesaian khusus)

Suatu *selesaian umum* dari (9) pada suatu interval buka I adalah suatu fungsi berbentuk

(10) $$y(x) = c_1y_1(x)+c_2y_2(x),\quad c_1,c_2 \text{ konstan sebarang}$$

dengan y_1 dan y_2 membentuk suatu *basis* (atau *sistem fundamental*) dari selesaian (9) pada I, yaitu, y_1 dan y_2 adalah selesaian (9) pada I yang tidak proporsional pada I.

Suatu *selesaian khusus* dari (9) pada I diperoleh jika kita memberikan nilai-nilai khusus untuk c_1 dan c_2 dalam (10).

Di sini y_1 dan y_2 dikatakan *proporsional* pada I jika

(11) $$\text{(a)}\ y_1=ky_2 \qquad \text{atau} \qquad \text{(b)}\ y_2=ly_1$$

berlaku untuk semua x pada I, dengan k dan l bilangan-bilangan, nol atau bukan.

Dengan menggunakan Teorema Dasar 1 pada 3.1. maka (10) merupakan selesaian dari (9).

Catatan.

Bebas linier. Definisi yang dinyatakan di atas dapat juga dirumuskan dalam bentuk “bebas linier”. Dua fungsi $y_1(x)$ dan $y_2(x)$ dikatakan bebas linier pada suatu interval definisi I jika

(13) $k_1y_1(x)+k_2y_2(x)=0$ pada I

mengakibatkan

(14) $k_1=0,\ k_2=0,$

dan $y_1(x)$ dan $y_2(x)$ dikatakan tak bebas linier pada suatu interval definisi I jika persaman juga dimenuhi untuk konstan-konstan k_1 dan k_2 yang tidak nol semua. Jika $k_1 \neq 0$ atau $k_2 \neq 0$, maka kita bisa melakukan suatu pembagian untuk mendapatkan selesaian

$$y_1 = -\frac{k_1}{k_2} y_2 \qquad \text{atau}$$

$$y_2 = -\frac{k_1}{k_2} y_1.$$

Jadi y_1 dan y_2 proporsional, sementara dalam kasus bebas linier y_1 dan y_2 tidak proporsional. Dengan demikian kita mempunyai hasil berikut

Variabel y_1 dan y_2 membentuk suatu basis dan y dalam (10) suatu selesaian dari (9) pada suatu interval I jika dan hanya jika y_1, y_2 adalah selesaian bebas linier dari (9) pada I.

Contoh 5. Basis. Selesaian umum. Selesaian khusus

Tentukan selesaian umum dari PD homogen

$$y''+5y'+6y = 0$$

Dan selesaian khusus yang memenuhi

syarat awal $y(0)=1{,}6$, $y'(0)=0$.

Penyelesaian.

Langkah1. Persamaan karakteristiknya adalah

$$\lambda^2+5\lambda+6=0.$$

Akar-akarnya adalah

$\lambda_1=-2$ dan $\lambda_2=-3$.

Sehingga selesaiannya adalah

$$y_1=e^{\lambda 1x}=e^{-2x} \qquad \text{dan}$$

$$y_2=e^{\lambda 2x}=e^{-3x}.$$

Karena hasil bagi y_1/y_2 bukan suatu konstan, maka y_1 dan y_2 tidak proporsional. Jadi y_1 dan y_2 membentuk suatu basis. Selesaian umum yang bersesuaian adalah

$$y(x) = c_1y_1(x)+c_2y_2(x) = c_1e^{-2x}+c_2e^{-3x}.$$

Langkah 2. Dengan syarat awal yang pertama,

$$y(0) = c_1+c_2 = 1{,}6 .... \text{(i)}.$$

Dengan penurunan,

$$y'(x) = -2c_1e^{-2x}-3c_2e^{-3x}.$$

Jadi dengan syarat awal yang kedua,

$$y'(0) = -2c_1-3c_2 = 0 .... \text{(ii)}.$$

Dari persamaan (i) dan (ii) diperoleh c_1=4,8 dan c_2=-3,2. Dengan demikian selesaian khusus yang memenuhi kedua syarat awal tersebut adalah

$$y = 4{,}8e^{-2x}-3{,}2e^{-3x}.$$

Contoh 6. Selesaian yang proporsional

Fungsi-fungsi

$$y_1=e^x \text{ dan } y_2=3e^x$$

adalah selesaian dari persamaan dalam contoh 4 pada pasal 3.2., tetapi karena

$$y_2=3y_1,$$

maka y_1 dan y_2 proporsional sehingga tidak membentuk basis.

Suatu Selesaian Umum dari (9) Meliputi Semua Selesaian

Teorema 2 (Selesaian umum, masalah nilai awal)

Misalkan PD linier homogen (9) mempunyai koefisien p(x) dan q(x) yang kontinu pada suatu interval buka I. maka (9) mempunyai suatu selesaian umum $y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ pada I, dan setiap selesaian (9) pada I tidak melibatkan konstan sebarang yang bisa diperoleh dengan memberikan nilai-nilai yang cocok untuk c_1 dan c_2. Lebih lanjut, setiap masalah nilai awal pada I terdiri dari persamaan (9) dan dua syarat awal $y(x_0)=K_0$, $y'(x_0)=K_1$ [dengan memberikan x_0 dalam I dan konstan K_0 dan K_1] mempunyai selesaian tunggal pada I.

Jadi (9) tidak mempunyai *selesaian singular*, yaitu, selesaian yang tidak bisa diperoleh dari suatu selesaian umum.

Memperoleh Basis Jika Satu Selesaian tidak Diketahui (Reduksi Orde)

Kita seringkali dapat memperoleh suatu selesaian y_1 (tidak sama dengan nol) dari suatu PD bentuk (9) dengan memperkirakan atau dengan suatu metode. Selanjutnya kita dapat menunjukkan bahwa selesaian independen kedua, yaitu y_2, dapat ditemukan dengan menyelesaikan suatu PD orde satu. Karena itu, hal ini disebut reduksi orde. Dalam metode ini kita mensubstitusikan $y(x)=u(x)y_1(x)$ dan turunan-turunannya:

$$y'=u'y_1+uy_1',$$

$$y''=u''y_1+2u'y_1'+uy_1''$$

ke dalam (9) dan mengumpulkan suku-sukunya untuk memperoleh

$$u''y_1+u'(2y_1'+py_1)+u(y_1''+py_1'+qy_1)=0.$$

Karena y_1 suatu selesaian dari (9), ekspresi yang ada dalam kurung yang terakhir bernilai nol. Selanjutnya hasilnya dibagi dengan y_1 dan ditulis $u'=U$.

Jadi

$$u''=U'$$

dan kita mempunyai

$$(U'+\left(\frac{2y_1'}{y_1}+p\right)U=0.$$

Dengan pemisahan variabel dan pengintegralan diperoleh

$$\ln U=-2\ln y_1-\int p\,dx+\tilde{c}.$$

atau

$$U=\frac{c}{y_1^2}e^{-\int p\,dx}. \qquad (14)$$

Di sini $U=u'$. Jadi selesaian yang ke dua adalah

$$y_2=uy_1$$

$$=y_1\int U\,dx.$$

Karena

$$y_2/y_1=u=\int U\,dx$$

tidak mungkin berupa suatu konstan, kita melihat bahwa y_1 dan y_2 membentuk suatu basis.

Contoh 8. Persamaan dengan koefisien konstan: Kasus akar sama

Dari 3.2. kita mengetahui bahwa persamaan dengan koefisien konstan

(15) $y''+ay'+by = 0$

mempunyai selesaian

$$y = e^{\lambda x},$$

dengan λ akar dari persamaan karakteristik

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

Persamaan ini mempunyai dua akar ganda

$$\lambda = -1/2a$$

jika dan hanya jika

$$a^2-4b=0.$$

Maka

$$b=a^2/4,$$

sehingga (15) menjadi

(15*) $y''+ay'+1/4a^2y = 0,$

dan mempunyai satu selesaian

$$y_1 = e^{-ax/2}.$$

Selesaian independen yang ke dua ditentukan dengan cara berikut. Dalam (14) kita perlukan

$$\int pdx=\int adx=ax \text{ dan}$$

$$1/y_1^2=e^{ax}.$$

Menghasilkan

$$U=ce^{ax}e^{-ax}$$

$$=c.$$

Jadi

$$u=\int Udx=cx+k,$$

Dengan c dan k sebarang. Dengan mengambil

$$u=x$$

diperoleh selesaian independen ke dua

$$y_2=uy_1$$

$$=xy_1,$$

yaitu

$$y_2=xe^{-ax/2}.$$

Jadi dalam kasus akar ganda (hanya dalam kasus ini saja!), suatu selesaian umum dari (15) [yang telah berubah menjadi (15*)!] adalah

(16) $$y = (c_1+c_2x)e^{\lambda x}, \qquad \lambda=-a/2.$$

Latihan 3.3

Tentukan apakah pasangan fungsi berikut bebas linier atau tidak dalam interval yang diberikan

1. e^x, e^{-x}, interval sebarang

2. x, x+1, $(0<x<1)$

3. sin2x, sinxcosx, interval sebarang.

Tentukan selesaian umum dari PD berikut pada suatu interval. Periksa bahwa dua fungsi yang terlibat itu membentuk basis (tidak proporsional)

4. $y''-25y=0$

5. $y''-8y'+16y=0$

6. $9y''-6y'+y=0$

Tentukan PD berbentuk $y''+ay'+by=0$ dengan selesaian pasangan fungsi yang diberikan dan periksa bahwa fungsi-fungsi itu membentuk basis pada suatu interval

7. e^{-3x}, e^{2x}

8. $e^{(-3+i)x}$, $e^{(-3-i)x}$

Reduksi orde. Tunjukkan bahwa fungsi y_1 yang diberikan merupakan suatu selesaian dari persamaan yang diberikan untuk semua bilangan positif x dan tentukan y_2 sedemikian hingga y_1 dan y_2 membentuk suatu basis selesaian untuk x ini.

9. $y''-(1/x)y'+(1/x^2)y=0$, $y_1=x$

10. $y''-(2/(x+1))y'+(2/(x+1)^2)y=0$, $y_1=x+1$.

Kunci jawaban Latihan 3.3

1. Bebas linier

3. Tak bebas linier

5. $y = (C_1+C_2x)e^{4x}$, $y_1 = e^{4x}$, $y_2 = xe^{4x}$.

7. $y''+y' - 6y = 0$

9. $y_2 = x\ln x$.

3.4 Akar Real, Komplek, Ganda dan Persamaan Karakteristik

Kita akan mempelajari cara memperoleh suatu selesaian umum dari PD linier orde dua dengan koefisien konstan. PD itu berbentuk

(17) $y''+ay'+by=0,$

dengan a dan b konstan.

Dari 3.2. kita mengetahui bahwa fungsi

(18) $y=e^{\lambda x}$

adalah suatu selesaian dari (17) jika λ suatu akar persamaan karakteristik

(19) $\lambda^2+a\lambda+by=0.$

Akar-akar itu adalah

(20)
$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(-a+\sqrt{a^2-4b}),$$
$$\lambda_2 = \frac{1}{2}(-a-\sqrt{a^2-4b}).$$

Karena a dan b real, persamaan karakteristik mungkin mempunyai

(Kasus I) **dua akar real berbeda**

(Kasus II) **dua akar komplek sekawan**

(Kasus III) **akar real ganda.**

Hal ini telah kita bicarakan dalam 3.2. Sekarang didiskusikan kasus-kasus ini secara terpisah dan setiap kasus ditentukan cara memperoleh penyelesaian umumnya.

Kasus I. Dua akar real berbeda

Kasus ini terjadi jika diskriminan a^2-4b dalam (19) positif, karena mengakibatkan nilai akar dalam (20) real (dan tidak nol). Jadi suatu basis dalam suatu intervalnya adalah

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \qquad y_2 = e^{\lambda_2 x}.$$

Tentusaja y_2/y_1 tidak konstan, sehingga dua selesaian itu tidak proporsional. Selesaian umum yang berkaitan adalah

(21) $$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Contoh 9. Selesaian umum dalam kasus akar real berbeda

Selesaikan

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

Penyelesaian.

Persamaan karakteristik

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

mempunyai akar-akar 1 dan –2, sehingga selesaian umumnya adalah

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x}.$$

Kasus II. Akar komplek

Kasus ini terjadi jika a^2-4b negatif, dan (20) mengakibatkan akar-akarnya komplek sekawan,

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2}a + i\omega,$$
$$\lambda_2 = -\frac{1}{2}a - i\omega,$$

dengan

$$\omega = \sqrt{b - \frac{1}{4}a^2}\ .$$

Kita klaim bahwa dalam kasus ini suatu basis dalam suatu interval adalah

$$y_1 = e^{-ax/2}\cos\omega x,$$
$$y_2 = e^{-ax/2}\sin\omega x \qquad .$$

Tentusaja ke dua fungsi di atas adalah selesaian dari PD (17). Juga, y_2/y_1 bukan suatu konstan, karena $\omega\neq 0$, sehingga y_1 dan y_2 tidak proporsional. Selesaian umum yang berkaitan adalah

(22) $\quad y = e^{-ax/2}(A\cos\omega x + B\sin\omega x).$

Fungsi eksponensial komplek

Fungsi eksponensial komplek e^z dari variabel komplek $z=s+it$ didefinisikan dengan

(23) $\quad e^z = e^{s+it} = e^s(\cos t + i\sin t).$

Jika $z=s$(real) maka $t=0$ sehingga $\cos 0=1$ dan $\sin 0=0$ yang menjadikan e^z sebagai fungsi eksponensial real.

Lebih lanjut, seperti untuk bilangan real, fungsi eksponensial ini memenuhi sifat

$$e^{z1+z2}=e^{z1}e^{z2},$$

untuk setiap bilangan komplek z_1 dan z_2.

Untuk

$$z=\lambda_1 x=-1/2ax+i\omega x \text{ dan}$$

$$z=\lambda_2 x=-1/2ax-i\omega x,$$

dengan (23) akan diperoleh fungsi fungsi

$$Y_1=e^{\lambda 1x}=e^{-ax/2}\ (\cos\omega x+i\sin\omega x)$$

$$Y_1=e^{\lambda 2x}=e^{-ax/2}\ (\cos\omega x-i\sin\omega x).$$

(rumus yang kedua diperoleh dengan mengingat bahwa $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$). Dengan menjumlahkan dan mengurangkan diperoleh

$$½(Y_1+Y_2) = e^{-ax/2}\cos\omega x = y_{1,}$$

$$\tfrac{1}{2}(Y_1-Y_2) = e^{-ax/2}\sin\omega x = y_{2.}$$

Contoh 10. Selesaian umum dalam kasus akar komplek sekawan

Tentukan selesaian umum dari persamaan

$$y''-2y'+10y=0.$$

Penyelesaian.

Persamaan karakteristiknya adalah

$$\lambda^2-2\lambda+10=0,$$

yang mempunyai akar-akar komplek sekawan

$$\lambda_1=1+3i, \qquad \text{dan}$$

$$\lambda_2=1-3i.$$

Ini menghasilkan basis

$$y_1=e^x\cos 3x,$$

$$y_2=e^x\sin 3x.$$

Selesaian umum yang berkaitan adalah

$$y=e^x(A\cos 3x+B\sin 3x).$$

Contoh 11.

Selesaikan masalah nilai awal

$$y''-2y'+10y=0, y(0)=4, y'(0)=1.$$

Penyelesaian.

Persamaannya sama dengan contoh 10, sehingga selesaian umumnya juga sama. Jika selesaian umumnya diturunkan diperoleh

$$y'(x)=e^x(A\cos 3x+B\sin 3x-3A\sin 3x+3B\cos 3x).$$

Dari y, y' dan syarat-syarat awalnya diperoleh

$$y(0)=A=4$$

$$y'(0)=A+3B)=1.$$

Jadi A=4 dan B=-1 dan jawabannya adalah

$$y=e^{x}(4\cos3x-\sin3x).$$

Contoh 12

Selesaian umum dari PD

$$y'+_{,}\omega^{2}y=0 \qquad\qquad (\omega \text{ konstan tak nol})$$

adalah

$$y=A\cos\omega x+B\sin\omega x..$$

Kasus III Akar ganda

Kasus ini sering disebut kasus kritis. Dari (20), kasus ini muncul jika diskriminannya nol, yaitu

$$a^{2}-4b=0.$$

Akarnya adalah

$$\lambda=-½a.$$

Maka sebagai suatu basis pada suatu interval adalah

$$e^{-ax/2}{}_{,} \qquad x\,e^{-ax/2}.$$

Selesaian umum yang bersesuaian adalah

(24) $y = (c_1+c_2x)e^{-ax/2}$.

Perhatian!

Jika λ suatu akar sederhana dari (19), maka

$$y = (c_1+c_2x)e^{\lambda x}$$

bukan suatu selesaian dari (17).

Contoh 13. Selesaian umum dalam kasus akar ganda

Selesaikan PD

$$y''+8y'+16y=0.$$

Penyelesaian.

Persamaan karakteristiknya mempunyai akar ganda $\lambda=-4$. Jadi yang menjadi suatu basis adalah

$$e^{-4x} \quad \text{dan}$$

$$xe^{-4x}$$

dan selesaian umum yang bersesuaian adalah

$$y=(c_1+c_2x)e^{-4x}.$$

Contoh 14. Masalah nilai awal untuk kasus akar ganda

Selesaikan MNA

$$y''-4y'+4y=0, \qquad y(0)=3, \qquad y'(0)=1.$$

Penyelesaian.

Suatu selesaian umum dari PD-nya adalah

$$y(x)=(c_1+c_2x)e^{2x}.$$

Dengan mengambil turunannya diperoleh

$$y'(x)=c_2e^{2x}+2(c_1+c_2x)e^{2x}.$$

Syarat-syarat awalnya memberikan

$$y(0)=c_1=3,$$

$$y'(0)=c_2+2c_1=1.$$

Jadi

$$c_1=3 \text{ dan } c_2=-5,$$

dan selesaian MNA-nya adalah

$$y=(3-5x)e^{2x}.$$

Ringkasan

Kasus	**Akar dari (3)**	**Basis dari (1)**	**Selesaian umum dari (1)**
I	Real beda λ_1, λ_2	$e^{\lambda 1x}, e^{\lambda 2x}$	$y=c_1 e^{\lambda 1x}+c_2e^{\lambda 2x}$
II	Komplek sekawan $\lambda_1=-a/2+i\omega$	$e^{-ax/2}\cos\omega x$	$y=e^{-ax/2}(A\cos\omega x+B\sin\omega x)$

	$\lambda_2=-a/2-i\omega$	$e^{-ax/2}\sin\omega x$	
III	Real ganda $\lambda=-a/2$	$e^{-ax/2}$, $xe^{-ax/2}$	$y=(c_1+c_2x)\, e^{-ax/2}$

Latihan 3.4

Periksalah bahwa fungsi-fungsi berikut adalah selesaian dari PD yang diberikan dan nyatakan dalam selesaian umum yang berbentuk real dari (22)

1. $y=c_1e^{5ix}+c_2e^{-5ix}$, $\quad y''+25y=0$

2. $y=c_1e^{i\pi x}+c_2e^{-i\pi x}$, $\quad y''+\pi^2y=0$

3. $y=c_1e^{(k+2\pi i)x}+c_2e^{(k-2\pi i)x}$, $\quad y''-2ky'+(k^2+4\pi^2)y=0$

Selesaian umum. Nyatakan apakah persamaan yang diberikan bersesuaian dengan kasus I, II atau III dan tentukan selesaian umum dalam bentuk fungsi real

4. $y''-4y=0$

5. $10y''+6y'+10{,}9y=0$

6. $4y''+36y'+81y=0$.

3.5 Operator Differensial

Operator adalah suatu transformasi yang mentransformasi suatu fungsi ke fungsi yang lain. Pendiferensialan menyarankan suatu operator seperti berikut. Misal D menyatakan pendiferensialan terhadap x, yaitu ditulis

$Dy=y'$.

D adalah suatu operator yang mentransformasikan y (yang dianggap terdiferensial) ke dalam turunannya, yaitu y'. Sebagai contoh,

$$D(x^2)=2x,$$

$$D(\sin x)=\cos x.$$

Penerapan D dua kali, diperoleh turunan ke dua

$$D(Dy)=Dy'=y''.$$

Kita cukup menuliskan D(Dy) dengan

$$D^2y=y'',$$

sehingga

$$Dy=y',$$

$$D^2y=y'',$$

$$D^3y=y''', \text{ dan seterusnya.}$$

Lebih umumnya,

(25) $L = P(D) = D^2+aD+b$

disebut **operator diferensial orde dua**. Di sini a dan b konstan. P menandakan **polinom**, L menandakan **linier.** Jika L dikenakan untuk fungsi y (dianggap terdiferensial dua kali), menghasilkan

(26) $L[y] = (D^2+aD+b)y = y''+ay'+by.$

L adalah suatu operator linier. Dengan definisi ini berarti bahwa

$$L[\alpha y+\beta w] = \alpha L[y]+\beta L[w]$$

Untuk konstan-konstan α dan β dan fungsi-fungsi y dan w yang terdiferensial dua kali.

Sekarang PD linier homogen

$$y''+ay'+by=0$$

bisa disederhanakan dengan menulis

(27) $L[y] = P(D)[y] = 0.$

Sebagai contoh,

(28) $L[y] = (D^2+D-6)y = y''+y'-6y = 0.$

Karena

$$D[e^{\lambda x}]= \lambda e^{\lambda x},\quad D^2[e^{\lambda x}]=\lambda^2 e^{\lambda x},$$

dengan (26) dan (27) maka

(29) $P(D)[e^{\lambda x}]=(\lambda^2+a\lambda+b)e^{\lambda x}=P(\lambda)e^{\lambda x}=0.$

Ini mengkonfirmasi hasil dari pasal terakhir bahwa $e^{\lambda x}$ adalah suatu selesaian dari (27) jika dan hanya jika λ adalah suatu selesaian dari persamaan karakteristik $P(\lambda)=0$.

Jika $P(\lambda)$ mempunyai dua akar berbeda, akan diperoleh suatu basis.

Jika $P(\lambda)$ mempunyai akar ganda, kita memerlukan selesaian independen yang ke dua. Untuk memperoleh selesaian itu, kita turunkan

$$P(D)[e^{\lambda x}]=P(\lambda)e^{\lambda x}$$

pada ke dua sisinya terhadap λ dan dengan penukaran pendiferensialan terhadap λ dan x, diperoleh

$$P(D)[xe^{\lambda x}]=P'(\lambda)e^{\lambda x}+P(\lambda)xe^{\lambda x}$$

dengan

$$P'=dP/d\lambda.$$

Untuk akar ganda, $P(\lambda)=P'(\lambda)=0$, sehingga

$$P(D)[xe^{\lambda x}]=0.$$

Jadi $xe^{\lambda x}$ adalah selesaian ke dua yang dicari. Ini cocok dengan pasal 2.4.

$P(\lambda)$ adalah polinom dalam λ, menurut aljabar biasa. Jika λ diganti dengan D, maka diperoleh **operator polinom P(D).** Tujuan dari *kalkulus operasi* ini adalah bahwa P(D) dapat diperlakukan seperti kuantitas aljabar biasa. Pada khususnya, kita dapat memfaktorkan.

Contoh 15. Faktorisasi, selesaian suatu PD

Faktorkan

$$P(D)=D^2+D-6$$

dan selesaikan

$$P(D)y=0.$$

Penyelesaian.

$$D^2+D-6 = (D+3)(D-2).$$

Dengan definisi

$$(D-2)y=y'-2y.$$

Jadi

$$(D+3)(D-2)y = (D+3)[y'-2y]$$

$$= y''-2y'+3y'-6y$$

$$= y''+y'-6y.$$

Jadi pemfaktoran yang kita lakukan *diperbolehkan*, yaitu, memberikan hasil yang benar. Selesaian dari

$$(D+3)y=0 \text{ dan}$$

$$(D-2)y=0$$

adalah

$$y_1=e^{-3x} \text{ dan } y_2=e^{2x}.$$

Ini adalah suatu basis dari $P(D)y=0$ pada suatu interval. Bisa diperiksa bahwa hasil yang diperoleh dengan metode seperti pada pasal 3.4 adalah sama. Ini adalah suatu hasil yang tak terduga karena kita memfaktorkan $P(D)$ sama seperti kita memfaktorkan polinomial karakteristik $P(\lambda)=\lambda^2+\lambda-6$.

Metode operasional ini juga dapat digunakan untuk operator $M=D^2+fD+g$ dengan $f(x)$ dan $g(x)$ koefisien variabel, tetapi dalam hal ini maslahnya lebih sulit dan perlu berhati-hati.

Sebagai contoh, $xD\neq Dx$ karena

$$xDy = xy' \qquad \text{tetapi} \quad Dxy=(xy)'=y+xy'.$$

Latihan 3.5

Gunakan operator yang diberikan untuk masing-masing fungsi yang diberikan

1. D^2+3D; $\cosh 3x$, $e^{-x}+e^{2x}$, $10-e^{-3x}$
2. $(D-2)(D+1)$; e^{2x}, xe^{2x}, e^{-x}, xe^{-x}

Tentukan selesaian umum dari persamaan berikut

3. $(D^2-D-2)y = 0$
4. $(6D^2-D-1)y$
5. $(\pi^2D^2-4\pi D+4)y=0$

3.6 Persamaan Euler-Cauchy

Persamaan Euler-Cauchy

(30) $$x^2y''+axy'+by = 0 \quad (a,\ b,\ \text{konstan})$$

dapat juga diselesaikan dengan manipulasi aljabar murni. Dengan substitusi

(31) $$y = x^m$$

dan turunan-turunannya ke dalam PD (1) diperoleh

$$x^2m(m-1)x^{m-2}+axmx^{m-1}+bx^m = 0.$$

Dengan mengabaikan x^m yang tidak nol jika $x \neq 0$, diperoleh persamaan bantu

(32) $$m^2+(a-1)m+b = 0.$$

Jika akar-akar m_1 dan m_2 dalam persamaan ini berlainan, maka fungsi-fungsi

$$y_1(x) = x^{m1} \quad \text{dan}$$

$$y_2(x) = x^{m2}$$

membentuk suatu basis selesaian dari PD (30) untuk semua x di tempat fungsi didefinisikan. Selesaian umum yang bersesuaian adalah

(33) $$y = c_1x^{m1}+c_2x^{m2} \qquad (c_1,\ c_2 \text{ sebarang}).$$

Contoh 16. Selesaian umum untuk kasus akar real berlainan

Selesaikan PD:

$$x^2y''-1{,}5xy'-1{,}5y=0.$$

Penyelesaian.

Persamaan bantunya adalah

$$m^2-2{,}5m-1{,}5 = 0.$$

Akar-akarnya adalah m_1=-0,5 dan m_2=3. Jadi basis dari suatu selesaian real untuk semua x yang positif adalah

$$y_1=1/\sqrt{x},$$

$$y_2=x^3$$

Dan selesaian umum yang berkaitan untuk nilai-nilai x tersebut adalah

$$y = c_1/\sqrt{x} + c_2x^3.$$

Jika akar-akar m_1 dan m_2 dari (32) adalah komplek, akar-akar itu berkawan, katakan

$$m_1=\mu+i\nu \text{ dan}$$

$$m_2=\mu-i\nu.$$

Kita klaim bahwa dalam kasus ini, suatu basis dari selesaian (30) untuk semua x yang positif adalah

$$y_1=x^{\mu}\cos(\nu \ln x),$$

(34) $$y_2= x^{\mu}\sin(\nu \ln x).$$

Untuk mengecek bahwa (34) merupakan selesaian dari (30) dapat dilakukan dengan melakukan penurunan dan substitusi. Kedua selesaian itu independen karena tidak proporsional. Selesaian umum yang berkaitan adalah

(35) $$y= x^{\mu}(A\cos(\nu \ln x) + B\sin(\nu \ln x)).$$

Catatan.

Ide dalam menentukan bahwa (34) merupakan basis selesaian dari (30) untuk kasus akar komplek sekawan adalah sebagai berikut:

Rumus

$$x^k = (e^{\ln x})^k = e^{k\ln x}$$

diperluas untuk bilangan komplek $k=i\nu$, dan dengan rumus Euler menghasilkan

$$x^{i\nu} = e^{i\nu \ln x}$$

$$= \cos(\nu \ln x) + i\sin(\nu \ln x),$$

$$x^{-i\nu} = e^{-i\nu \ln x}$$

$$= \cos(\nu \ln x) - i\sin(\nu \ln x).$$

Selanjutnya kalikan dengan x^{μ} dan ambil jumlah den selisihnya untuk mendapatkan $2y_1$ dan $2iy_2$. Dengan membagi berturut-turut dengan 2 dan 2i akan diperoleh (34).

Contoh 17. Selesaian umum untuk kasus akar komplek sekawan

Selesaikan PD:

$$x^2y''+7xy'+13y=0.$$

Penyelesaian.

Persamaan bantunya adalah

$$m^2+6m+13=0.$$

Akar-akar dari persamaan ini adalah

$$m_{1,2}=3\pm 2i.$$

Jadi selesaian umumnya adalah

$$y=x^{-3}[A\cos(2\ln x)+B\sin(2\ln x)].$$

Persamaan bantu (32) mempunyai akar ganda

$$m_1=m_2$$

jika dan hanya jika

$$b=¼(1-a)^2, \quad \text{sehingga}$$

$$m_1=m_2=(1-a)/2.$$

Dalam kasus kritis ini kita bisa memperoleh selesaian ke dua dengan menerapkan metode reduksi orde. Prosedurnya sejalan dengan yang ada di Pasal 3.3. dan hasilnya adalah

$$y_2=uy_1$$

$$=(\ln x)y_1.$$

Dengan demikian selesaian (30) untuk kasus akar sama adalah

(36) $$y_1=x^m \quad \text{dan } y_2=x^m\ln x, \text{ dengan}$$

$$m=(1-a)/2.$$

Kedua selesaian itu independen, sehingga membentuk basis dari selesaian real (30) untuk semua x yang positif, dan selesaian umum yang berkaitan adalah

(37) $$y=(c_1+c_2\ln x)x^m,$$

dengan c_1 dan c_2 konstan sebarang.

Contoh 18. Selesaian umum dalam kasus akar sama.

Selesaikan

$$x^2y''+-3xy'+4y=0.$$

Penyelesaian.

Persamaan bantunya mempunyai akar ganda m=2. Jadi suatu basis dari penyelesaian umumnya untuk semua x positif adalah

$$x^2 \text{ dan}$$

$$x^2 \ln x,$$

dan selesaian umum yang berkaitan adalah

$$y=(c_1+c_2 \ln x)x^2.$$

Latihan 3.6

1. Periksa bahwa y_1 dan y_2 dalam (5) adalah selesaian dari (1) untuk semua x positif.

Tentukan selesaian umum PD:

2. $x^2y''-20y=0$

3. $x^2y''-7xy'+16y=0$

4. $x^2y''+3xy'+5y=0$

5. $(x^2D^2+7xD+9)y=0$

6. $(2x^2D^2+5xD-9)y=0$

7. $(x^2D^2-0,2xD+0,36)y=0$.

Kunci jawaban Latihan 3.6

3. $y = (C_1+C_2\ln x)x^4$

5. $y = (C_1+C_2\ln x)x^3$

7. $y = (C_1+C_2\ln x)x^{0,6}$

3.7 Eksistensi dan Ketunggalan Selesaian

Didiskusikan eksistensi dan ketunggalan selesaian PD homogen umum.

Eksistensi dan Ketunggalan

Suatu masalah nilai awal untuk PD orde dua terdiri dari suatu PD orde dua dan dua syarat awal, yang pertama untuk selesaian y(x) dan yang ke dua untuk y'(x). Jadi suatu MNA untuk PD linier homogen orde dua terdiri dari PD

(38a) $$y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

dan dua syarat awal

(38b) $$y(x_0) = K_0 \quad y'(x_0) = K_1.$$

Di sini x_0 adalah nilai x yang diberikan dan K_0 dan K_1 adalah konstan-konstan yang diberikan.

Kekontinuan p(x) dan q(x) merupakan syarat cukup untuk eksistensi dan ketunggalan selesaian MNA (37) sesuai dengan teorema berikut

Teorema 3. (Teorema eksistensi dan ketunggalan)

Jika p(x) dan q(x) fungsi-fungsi yang kontinu pada suatu interval buka I dan x_0 dalam I, maka MNA (37), yaitu (38a) dan (38b), mempunyai suatu selesaian yang tunggal pada interval I.

Kebebaslinieran. Wronski.

Eksistensi dari selesaian umum.

Kita diskusikan akibat teorema 1 terhadap selesaian umum

(39) $$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x) \qquad (c_1,c_2 \text{ konstan sebarang})$$

dari PD linier homogen (38a). Dari pasal 3.3. diketahui bahwa (39) adalah suatu **selesaian umum** dari (38a) pada suatu interval buka I jika y_1 dan y_2 membentuk suatu basis dari selesaian (38a) pada I, yaitu y_1 dan y_2 bebas linier pada I. Suatu selesaian yang diperoleh dari (39) dengan memberikan nilai khusus untuk konstan c_1 dan c_2 disebut **selesaian khusus** dari (38a) pada I.

Lebih lanjut, perlu diingat bahwa y_1 dan y_2 dikatakan **bebas linier** pada I jika

$$k_1y_1(x)+k_2y_2(x)=0$$

pada I mengakibatkan

$$k_1=0,\ k_2=0;$$

dan y_1 dan y_2 dikatakan **tak bebas linier** pada I jika persamaan juga dipenuhi untuk $k_1$dan k_2 yang tidak semuanya nol. Dalam kasus ini, dan hanya dalam kasus ini, y_1 dan y_2 proporsional pada 1, yaitu,

(40) $$y_1=ky_2 \quad \text{atau} \quad y_2=ly_1.$$

Tujuan kita adalah memperlihatkan bahwa jika (38a) mempunyai koefisien-koefisien p(x) dan q(x) yang kontinu pada I, maka (38a) selalu mempunyai selesaian umum pada I dan, yang kedua, selesaian umum itu memuat semua selesaian dari (38a) pada I; jadi persamaan linier (38a) tidak mempuntai "selesaian singular", yaitu selesaian yang tidak bisa diperoleh dengan memberikan nilai-nilai khusus pada konstan-konstan dalam selesaian umumnya.

Langkah yang pertama, kita turunkan kriteria yang sangat berguna untuk ketakbebaslinieran dan kebebaslinieran selesaian. Kriteria ini menggunakan *determinan Wronski*, atau singkatnya **Wronski,** dari dua selesaian y_1 dan y_2 dari (1a), yang didefinisikan dengan

(41) $$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$
$$= y_1 y_2' - y_2 y_1'.$$

Teorema 4 (Ketakbebaslinieran dan Kebebaslinieran Selesaian)

Misal (38a) mempunyai koefisien-koefisien p(x) dan q(x) yang kontinu pada suatu interval buka I. maka ke dua selesaian y_1 dan y_2 dari (38a) pada I adalah bebas linier jika dan hanya jika Wronski W bernilai nol pada suatu x_0 dalam I. Lebih lanjut, jika W=0 untuk $x=x_0$, maka $W\equiv 0$ pada I; jadi jika ada suatu x_1 dalam I dimana $W\neq 0$, maka y_1 dan y_2 bebas linier pada I.

Contoh 19. Penerapan Teorema 4.

Tunjukkan bahwa

$$y_1=\cos\omega x,$$

$$y_2=\sin\omega x$$

membentuk suatu basis dari selesaian

$$y''+\omega^2 y=0,\ \omega\neq 0,$$

pada suatu interval.

Penyelesaian.

Dengan substitusi dapat ditunjukkan bahwa y_1 dan y_2 keduanya adalah selesaian dari PD-nya. Dengan teorema 4,

$$W(\cos\omega x, \sin\omega x)=\begin{vmatrix} \cos\omega x & \sin\omega x \\ -\omega\sin\omega x & \omega\cos\omega x \end{vmatrix}$$

$$= \omega(\cos^2\omega x + \sin^2\omega x)$$

$$= \omega \neq 0,$$

Sehingga ke duanya bebas linier.

Contoh 20. Penerapan Teorema 2.

Tunjukkan bahwa

$$y=(c_1+c_2x)e^x$$

adalah suatu selesaian

$$y''-2y'+y=0$$

pada suatu interval.

Penyelesaian.

Dengan substitusi dapat ditunjukkan bahwa

$$y_1=e^x \text{ dan}$$

$$y_2=xe^x$$

adalah selesaian PD-nya. Karena,

$$W(e^x,xe^x) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (x+1)e^x \end{vmatrix}$$

$$= (x+1)e^{2x} - xe^{2x}$$

$$= xe^{2x} \neq 0.$$

Maka y_1 dan y_2 bebas linier.

Teorema 5. Eksistensi Selesaian Umum

Jika koefisien p(x) dan q(x) dalam (38a) kontinu pada suatu interval buka I, maka (38a) mempunyai suatu selesaian umum pada I.

Sebagai langkah yang terakhir, dengan teorema 3-5, ditunjukkan bahwa

Suatu selesaian Umum dari (1a) meliputi semua selesaian

Teorema 6 (Selesaian Umum)

Misal (38a) mempunyai koefisien-koefisien p(x) dan q(x) yang kontinu pada suatu interval buka I. maka setiap selesaian y = Y(x) dari (38a) pada I mempunyai bentuk

$$Y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x), \tag{42}$$

dengan y_1, y_2 *membentuk suatu basis selesaian (38a) dan* C_1, C_2 *konstan-konstan yang sesuai.*

3.8 Persamaan Linier Homogen Orde n

Suatu PD orde n dikatakan **linier** jika dapat dituliskan dalam bentuk

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = r(x), \tag{43}$$

dengan

$$p_{n-1}(x), \dots , p_1(x), p_0(x), \text{ dan } r(x)$$

fungsi-fungsi dari x dan $y^{(n)}$ menyatakan turunan ke-n dari y terhadap x.

Sementara itu suatu PD orde n yang tidak dapat dinyatakan dalam bentuk (43) dikatakan **taklinier**.

Jika $r(x) \equiv 0$, persamaan (43) menjadi

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0, \tag{44}$$

dan disebut disebut **homogen**. Jika $r(x) \not\equiv 0$, maka disebut **takhomogen**.

Selesaian, Selesaian Umum, Kebebaslinieran

Suatu fungsi $y = \phi(x)$ disebut suatu selesaian dari suatu PD (linier atau taklinier) orde n pada suatu interval I, jika $\phi(x)$ terdefinisikan dan terdiferensial sampai n kali pada I dan sedemaikian hingga persamaan menjadi suatu identitas jika kita mengganti fungsi y yang belum ditentukan dan turunan-turunannya dalam persamaan itu dengan ϕ dan turunan-turunan yang sesuai.

Suatu selesaian umum dari (44) pada suatu interval buka I adalah suatu fungsi yang berbentuk

(45) $y(x) = c_1y_1(x)+\ldots+c_ny_n(x)$, ($c_1,\ldots,c_n$ konstan sebarang)

dengan $y_1,\ldots,y_n$ membentuk suatu **basis** (atau sistem fundamental) dari selesaian (44) pada I; yaitu, $y_1,\ldots,y_n$ merupakan selesaian dari (44) pada I yang bebas linier pada I, sebagaimana didefinisikan di bawah ini.

Suatu **selesaian khusus** dari (44) pada I diperoleh jika konstan-konstan $c_1,\ldots,c_n$ dalam (45) diberikan nilai-nilai tertentu.

Dalam hal ini, n ($\geq$2) buah fungsi $y_1(x),\ldots,y_n(x)$ dikatakan **bebas linier** pada suatu interval I di tempat fungsi-sungsi itu didefinisikan jika persamaan

(46) $k_1y_1(x) + \ldots +k_ny_n(x) = 0$ pada I

mengakibatkan bahwa

semua $k_1, \ldots, k_n$ nol.

Fungsi-fungsi ini disebut **tak bebas linier** pada I jika persamaan juga dipenuhi pada I untuk $k_1, \ldots, k_n$ yang tidak semuanya nol.

Jika dan hanya jika $y_1,\ldots,y_n$ tak bebas linier pada I, maka kita dapat menyatakan (paling sedikit) satu dari fungsi-fungsi ini sebagai suatu "kombinasi linier" dari n-1 buah fungsi lannya pada I. Sebagai contoh, jika (46) dipenuhi dengan $k_1\neq0$, maka persamaan bisa dibagi dengan k_1 dan y_1 dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier:

$$y_1 = -(1/k_1)(k_2y_2+\ldots+k_ny_n).$$

Contoh 21. Ketakbebaslinieran

Tunjukkan bahwa fungsi-fungsi

$$y_1=x,$$

$$y_2=3x,$$

$$y_3=x^2$$

tidak bebas linier pada suatu interval.

Penyelesaian.

$$y_2=3y_1+0y_3.$$

Contoh 22. Kebebaslinieran

Tunjukkan bahwa

$$y_1=x,$$

$$y_2=x^2, \text{ dan}$$

$$y_3=x^3$$

adalah bebas linier pada suatu interval, misal $-1\leq x\leq 2$.

Penyelesaian.

Persaman (46) adalah

$$k_1x+k_2x^2+k_3x^3=0.$$

Dengan mengambil x=-1,1,2, diperoleh berturut-turut,

$$-k_1+k_2-k_3=0,$$

$$k_1+k_2+k_3=0,$$

$$2k_1+4k_2+8k_3=0,$$

yang mengakibatkan

$$k_1=k_2=k_3=0.$$

Jadi bebas linier.

MNA, Eksistensi dan Ketunggalan

Suatu MNA untuk persamaan (46) terdiri dari (46) dan n buah syarat awal

(47) $y(x_0)=K_0,\quad y'(x_0)=K_1,\ \ldots,\quad y^{(n-1)}(x_0)=K_{n-1},$

dengan x_0 suatu titik tertentu dalan interval I yang diselidiki.

Sebagai perluasan dari Teorema 1 untuk PD orde n adalah

Teorema 7 (Teorema Eksistensi dan Ketunggalan)

Jika $p_0(x),\ldots,p_{n-1}(x)$ dalam (43) fungsi-fungsi kontinu pada suatu interval buka I, maka MNA yang terdiri dari (42) dan syarat-syarat awal (47) [dengan x_0 dalam I] mempunyai suatu selesaian tunggal y(x) pada I.

Kriteria Kebebasan.

Eksistensi Selesaian Umum

Uji untuk ketakbebaslinieran dan kebebaslinieran selesaian (Teorema 4 dalam PD orde dua) dapat diperumum untuk persamaan orde-n seperti berikut.

Teorema 8 Ketakbebaslinieran Dan Kebebaslinieran Selesaian

Misal koefisien-koefisien $p_0(x),\ldots,p_{n-1}(x)$ dalam (43) adalah fungsi-fungsi kontinu pada suatu interval buka I. Maka n buah selesaian $y_1,\ldots,y_n$ dari (45) adalah bebas linier pada I jika dan hanya jika Wronskinya:

$$W(y_1,\ldots,y_n)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ . & . & \cdots & . \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \qquad (48)$$

adalah nol untuk suatu $x=x_0$ dalam I. Lebih lanjut, jika W=0 untuk $x=x_0$, maka $W\equiv 0$ pada I; jadi jika ada suatu x_1 dalam I dengan $W\neq 0$, maka $y_1,\ldots,y_n$ bebas linier pada I.

Contoh 23. Uji untuk basis dan selesaian khusus

Tunjukkan bahwa

$$y = c_1+c_2e^x+c_3e^{-x}$$

adalah suatu selesaian umum dari

$$y'''-y'=0$$

pada suatu interval buka I.

Penyelesaian.

Substitusi menunjukkan bahwa

$$y_1=1,$$

$$y_2=e^x,$$

$$y_3=e^{-x}$$

adalah selesaian pada suatu I. Teorema 8 mengakibatkan bahwa selesaian-selesaian itu membentuk suatu basis pada I karena Wronski-nya tidak nol:

$$\begin{aligned} W(1, e^x, e^{-x}) &= \begin{vmatrix} 1 & e^x & e^{-x} \\ 0 & e^x & -e^{-x} \\ 0 & e^x & e^{-x} \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot \begin{vmatrix} e^x & -e^{-x} \\ e^x & e^{-x} \end{vmatrix} \\ &= e^x e^{-x} + e^{-x} e^x \\ &= 2. \end{aligned}$$

Persamaan (43) selalu mempunyai selesaian umum. Karena Teorema 5 dalam 3.7 dapat diperluas seperti berikut.

Teorema 8 (Eksistensi suatu Selesaian Umum)

Jika koefisien-koefisien $p_0(x),\ldots,p_{n-1}(x)$ dalam (43) fungsi-fungsi kontinu pada suatu interval buka I, maka (43) mempunyai suatu selesaian umun pada I.

Lebih lanjut, suatu selesaian umum dari (43) memuat semua selesaian dari (45). Jadi kita mempunyai teorema:

Teorema 9 (Selesaian umum)

Misal (43) mempunyai koefisien-koefisien $p_0(x),\ldots,p_{n-1}(x)$ yang kontinu pada suatu interval buka I. Maka setiap selesaian $y = Y(x)$ dari (43) pada I mempunyai bentuk

(49) $\quad Y(x) = C_1y_1(x)+\ldots+C_ny_n(x),$

di mana $y_1,\ldots,y_n$ membentuk suatu basis dari selesaian (44) pada I dan $C_1,\ldots,C_n$ konstan-konstan yang sesuai.

Jadi untuk n=2, teorema ini mengatakan bahwa persamaan linier (44) tidak mempunyai *selesaian singular,* tetapi setiap selesaian yang tidak melibatkan konstan sebarang adalah suatu selesaian khusus.

3.9 Persamaan Orde n dengan Koefisien Konstan

Metode dalam pasal 3.2 dapat diperluas untuk persamaan linier homogen orde n dengan koefisien konstan

(50) $\quad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1y' + a_0y = 0.$

Dengan substitusi $y = e^{\lambda x}$ dan turunan-turunannya diperoleh persamaan karakteristik

(51) $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$

dari (50).

Jika persamaan ini mempunyai n buah akar $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ yang berbeda, maka n buah selesaian

(52) $y_1=e^{\lambda 1x}, \dots, y_n=e^{\lambda nx}$

membentuk suatu basis untuk semua x, dan selesaian umum dari (50) yang bersesuaian adalah

(53) $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x}$.

Tentusaja selesaian dalan (52) adalah bebas linier pada suatu interval buka, karena Wronski-nya tidak nol dimana-mana.

Untuk nilai n yang besar, yang menjadi masalah adalah menentukan akar dari (51). Salah satu cara untuk menemukan suatu akar λ_1 adalah dengan pemeriksaan dan kemudian membagi (51) dengan $\lambda-\lambda_1$ untuk memperoleh suatu polinom dengan derajat n-1.

Contoh 24. Akar-akar real berbeda

Selesaikan PD

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0.$$

Penyelesaian.

Akar-akar dari persamaan karakteristik

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$$

adalah –1, 1, dan 2, dan selesaian umum (53) yang bersesuaian adalah

$$y = c_1e^{-x} + c_2e^{x} + c_3e^{2x}.$$

Akar-akar sederhana komplek

Jika akar-akarnya komplek, maka akar-akar itu harus berupa pasangan-pasangan yang sekawan, karena koefisien-koefisien dari (50) bernilai real. Jadi, jika $\lambda=\gamma+i\omega$ adalah suatu akar sederhana dari (51), maka kawannya, yaitu $\underline{\lambda}=\gamma-i\omega$, juga merupakan suatu akar, dan dua buah selesaian linier independen yang bersesuaian adalah

$$y_1=e^{\gamma x}\cos\omega x, \quad y_2=e^{\gamma x}\sin\omega x.$$

Contoh 25. Akar sederhana komplek sekawan

Selesaikan MNA

$$y'''-2y''+2y'=0, \qquad y(0)=0{,}5, \qquad y'(0)=-1, \qquad y''(0)=2.$$

Penyelesaian.

Suatu akar dari

$$\lambda^3-2\lambda^2+2\lambda = 0$$

adalah

$$\lambda_1 = 0.$$

Selesaian yang bersesuaian adalah

$$y_1=e^{0x}$$

$$=1.$$

Pembagian dengan λ menghasilkan

$$\lambda^2-2\lambda+2=0.$$

Akar-akarnya adalah

$$\lambda_2=1+i \text{ dan}$$

$$\lambda_3=1-i.$$

Selesaian-selesaian yang bersesuaian adalah

$$y_2=e^x\cos x \text{ dan}$$

$$y_3=e^x\sin x.$$

Selesaian umum yang bersesuaian dan turunan-turunannya adalah

$$y = c_1+e^x(A\cos x + B\sin x)$$

$$y' = e^x[(A+B)\cos x + (B-A)\sin x],$$

$$y'' = e^x[2B\cos x - 2A\sin x].$$

Syarat-syarat nilai awal menghasilkan

$$y(0) = c_1+A = 0{,}5,$$

$$y'(0) = A+B = -1,$$

$$y''(0) = 2B = 2.$$

Jadi

$$B = 1,\ \ A = -2,\ \ c_1 = 2{,}5,$$

sehingga selesaian umum PD-nya adalah

$$y = 2{,}5 + e^x(-2\cos x+\sin x).$$

Akar-akar Ganda

Jika terjadi akar ganda, katakan,

$$\lambda_1=\lambda_2,\ \ \text{maka}$$

$$y_1=y_2$$

dalam (52) dan dua buah selesaian bebas linier yang bersesuaian adalah

$$y_1 \text{ dan}$$

$$y_2=xy_1.$$

Jika terjadi akar rangkap tiga, katakan,

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3, \text{ maka}$$

$$y_1=y_2=y_3$$

dalam (52) dan tiga buah selesaian bebas liniernya adalah

(54) $y_1,\ xy_1,\ x^2y_1.$

Secara umum, jika λ adalah akar rangkap m, maka m buah selesaian bebas linier yang bersesuaian adalah

(55) $e^{\lambda x},\quad xe^{\lambda x},\ \ldots,\ x^{m-1}e^{\lambda x}.$

Fungsi-fungsi di atas adalah bebas linier pada suatu interval, karena $1, x, \ldots, x^{m-1}$ bebas linier; sebagai akibat dari Teorema 8 pasal 3.8, mengingat fungsi-fungsi ini adalah selesaian dari $y^{(m)} = 0$. [Nilai Wronskinya adalah $(m-1)!(m-2)!\ldots3!2!$].

Kita tunjukkan bahwa fungsi (55) adalah selesaian dari (50) dalam kasus akar ganda.

Rumusnya akan lebih sederhana jika digunakan notasi operator, dengan menulis (50) sebagai

$$L[y] = P(D)[y] = [D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_0]y = 0.$$

Dengan asumsi,

(56) $$P(D) = Q(D)(D-\lambda)^m$$

dimana Q(D) adalah operator diferensial orde n-m dan yang bersesuaian dengan akar-akar lain yang mungkin dimiliki oleh persamaan karakteristik (50). Untuk fungsi-fungsi $x^k e^{\lambda x}$ (k=0,1,…,m-1) dalam (55) dengan penurunan diperoleh

$$(D-\lambda)(x^k e^{\lambda x}) = kx^{k-1}e^{\lambda x} + \lambda x^k e^{\lambda x} - \lambda x^k e^{\lambda x} = kx^{k-1}e^{\lambda x}.$$

Dengan mengenakan operator (D-λ) pada nilai ini diperoleh

$$(D-\lambda)^2(x^k e^{\lambda x}) = (D-\lambda)[kx^{k-1}e^{\lambda x}] = k(k-1)x^{k-2}e^{\lambda x}$$

dan seterusnya. Akhirnya diperoleh

$$(D-\lambda)^k(x^k e^{\lambda x}) = k!e^{\lambda x},$$

sehingga

$$(D-\lambda)^{k+1}(x^k e^{\lambda x}) = k!(D-\lambda)e^{\lambda x} = 0.$$

Karena k = 0, …, m-1 dalam (6), maka $k+1 \le m$; jadi

$$(D-\lambda)^m(x^k e^{\lambda x}) = 0 \qquad k = 0, \ldots, m-1.$$

Karena (56), maka terbukti bahwa (55) adalah selesaian dari (50) dalam kasus akar orde m.

Contoh 26. Akar-akar real rangkap dua dan tiga

Selesaiakan PD

$$y^{(V)} - 3y^{(IV)} + 3y''' - y'' = 0.$$

Penyelesaian.

Persamaan karakteristiknya adalah

$$\lambda^5 - 3\lambda^4 + 3\lambda^3 - \lambda^2 = 0,$$

yang mempunyai akar-akar

$$\lambda_1=\lambda_2=0, \text{ dan}$$

$$\lambda_3=\lambda_4=\lambda_5=1,$$

sehingga penyelesaian umumnya adalah

$$y = c_1+c_2x+c_3 e^x + c_4xex+c_5x^2e^x.$$

Akar Rangkap Komplek

Dalam kasus ini selesaian real diperoleh seperti untuk kasus akar sederhana komplek di atas. Jadi jika $\lambda = \gamma+i\omega$ adalah suatu akar ganda komplek, maka sekawannya, yaitu $\underline{\lambda} = \gamma-i\omega$ juga demikian. Selesaian bebas linier yang bersesuaian adalah

$$e^{\gamma x}\cos\omega x,$$

$$e^{\gamma x}\sin\omega x,$$

$$xe^{\gamma x}\cos\omega x,$$

$$xe^{\gamma x}\sin\omega x.$$

Dua selesaian yang pertama diperoleh dari $e^{\lambda x}$ dan $e^{\underline{\lambda} x}$ seperti sebelumnya,dan dua selesaian yang terakhir diperoleh dari $xe^{\lambda x}$ dan $xe^{\underline{\lambda} x}$ dengan cara yang sama.

Untuk akar rangkap tiga komplek (yang hampir tidak pernah terjadi dalam penerapannya), dua selesaian yang lainnya adalah

$$x^2e^{\gamma x}\cos\omega x \text{ dan}$$

$$x^2e^{\gamma x}\sin\omega x,$$

dan seterusnya.

Contoh 27. Akar-akar ganda komplek

Selesaikan PD

$$y^{(7)} + 18y^{(5)} + 81y''' = 0.$$

Penyelesaian.

Persamaan karakteristik

$$\lambda^7+18\lambda^5+81\lambda^3=\lambda^3(\lambda^4+18\lambda^2+81)$$

$$= \lambda^3(\lambda^2+9)^2$$

$$=\lambda^3[(\lambda+3i)(\lambda-3i)]^2$$

$$=0$$

mempunyai 0 sebagai akar rangkap tiga dan akar-akar ganda –3i dan 3i. Jadi, dengan (9) dan mengambil $\lambda=0$ dan $\omega=3$, diperoleh selesaian umum

$y = c_1+c_2x+c_3x^2+ A_1\cos 3x+B_1\sin3x + x(A_2\cos 3x+B_2\sin3x)$.

Latihan 3.9

Tentukan suatu persamaan bentuk (1) yang mempunyai basis:

1. $1, x, e^{3x}, xe^{3x}$

2. $e^{-2x}, xe^{-2x}, x^2e^{-2x}$

3. coshx, sinhx, xcoshx, xsinhx.

Tentukan selesaian umum dari

4. $y''' - y' = 0$

5. $y^{IV}-5y''+4y=0$

6. $y^{IV}-y=0$

Selesaikan MNA

7. $y'''+9y'=0$, $y(0)=4$, $y'(0)=0$, $y''(0)=9$

8. $y^{IV}-y=0$, $y(0)=5$, $y'(0)=2$, $y''(0)=-1$, $y'''(0)=2$

Kunci Jawaban Latihan 3.9

1. $y'''-3y''=0$

5. $y = C_1e^{x}+C_2e^{-x} + C_3e^{2x}+C_4e^{-2x}$