BAB II

PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE SATU

Kompetensi

Mahasiswa diharapkan:

1. Mengenali bentuk PD orde satu dengan variabel terpisah dan tak terpisah.
2. Dapat mengubah bentuk PD tak terpisah menjadi terpisah melalui transformasi variabel yang sesuai.
3. Menentukan keeksakan suatu PD orde satu.
4. Menyelesaikan persamaan differensial eksak dengan menggunakan metode yang sesuai.
5. Mengubah PD tak eksak menjadi eksak dengan mengalikannya dengan faktor integral yang hanya bergantung pada satu variabel.
6. Menentukan selesaian PD linier orde satu yang homogen dan tak homogen.

Materi

1. Persamaan diferensial terpisah
2. Reduksi ke Bentuk Terpisah
3. Persamaan Diferensial Eksak
4. Faktor Integral
5. PD Linier orde satu

BAB II

PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE SATU

Persamaan diferensial (PD) orde satu merupakan bentuk PD yang paling sederhana, karena hanya melibatkan turunan pertama dari suatu fungsi yang tidak diketahui. Jika dalam persamaan tersebut variabel bebas dan variabel tak bebasnya berada pada sisi yang berbeda dari tanda persamaannya, maka disebut PD yang terpisah dan untuk menentukan selesaiannya tingla diintegralkan. Jika tidak demikian, maka disebut PD tak terpisah. Suatu PD orde satu yang tak terpisah biasanya dapat dengan mudah dijadikan PD terpisah melalui penggantian (substitusi) dari salah satu variabelnya.

2.1 Persamaan diferensial terpisah

Banyak PD orde satu yang dapat direduksi ke dalam bentuk

(1) $$g(y)y' = f(x)$$

dengan menggunakan manipulasi aljabar. Karena

$$y' = dy/dx,$$

maka kita lebih sering menuliskan (1) sebagai

(2) $$g(y)\, dy = f(x)\, dx.$$

Karena dalam persamaan (2) variabel x dan y terpisah, yakni masing-masing berada pada sisi yang berlainan, maka persamaan (2) disebut *PD variabel terpisah*, atau secara singkat cukup dinamakan *persamaan terpisah*.

Dengan melakukan pengintegralan pada dua sisinya, diperoleh

(3) $$\int g(y)dy = \int f(x)dx + c.$$

Jika kita menganggap bahwa f dan g fungsi-fungsi yang kontinu, maka integral dalam (3) ada, dan dengan mengevaluasi integral ini kita dapat memperoleh selesaian persamaan (1).

Contoh 1

Selesaikan PD:

$$9yy' + 4x = 0.$$

Penyelesaian:

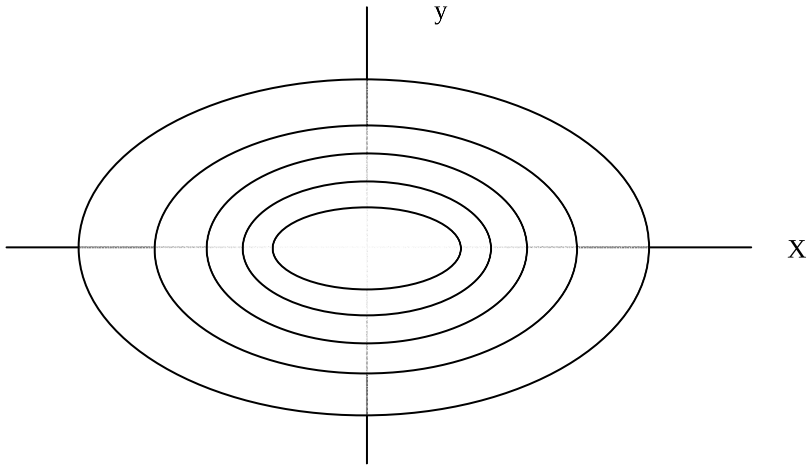
Dengan pemisahan variabel akan diperoleh

$$9y\ dy = -4x\ dx.$$

Dengan pengintegralan pada masing-masing sisinya akan diperoleh selesaian umum:

$$\frac{9}{2}y^2 = -2x^2 + c_1 \text{ atau}$$
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = c, \text{dengan } c = \frac{c_1}{18}.$$

Selesaian ini menyatakan suatu keluarga ellips.



Gambar   Selesaian PD 9yy' + 4x = 0.

Contoh 2

Selesaikan PD:

$$y' = 1 + y^2.$$

Penyelesaian:

Dengan pemisahan variabel dan pengintegralan akan diperoleh

$$\frac{dy}{1+y^2} = dx,$$
$$\arctan y = x + c,$$
$$y = \tan(x + c).$$

Perlu diperhatikan bahwa kita harus menambahkan suatu konstanta integrasi setelah melakukan pengintegralan.

Contoh 3

Selesaikan PD:

$$y' = -2xy.$$

Penyelesaian:

Dengan pemisahan variabel diperoleh

$$\frac{dy}{y} = -2x\,dx, \qquad\qquad (y \neq 0).$$

Pengintegralan menghasilkan

(1) $$\ln|y| = -x^2 + c_1.$$

Untuk melakukan pengecekan ruas kiri diturunkan sebagai berikut.

Jika

$$y > 0,$$

maka

$$(\ln y)' = y'/y.$$

Jika

$$y < 0$$

maka

$$-y > 0 \text{ sehingga}$$

$$(\ln(-y))' = -y'/(-y)$$

$$= y'/y.$$

Karena

$$y = |y|$$

jika

$y > 0$

dan

$$-y = |y|$$

jika

$$y < 0,$$

maka terbukti bahwa

$$(\ln|y|)' = y'/y.$$

Lebih lanjut, dari (4) diperoleh

$$|y| = e^{-x^2 + c_1}.$$

Kita mengetahui bahwa

$$e^{a+b} = e^a e^b.$$

Dengan memilih

$$e^{c1} = c$$

jika

$$y > 0 \text{ dan}$$

$$e^{c1} = -c$$

jika

$$y < 0,$$

maka akan diperoleh

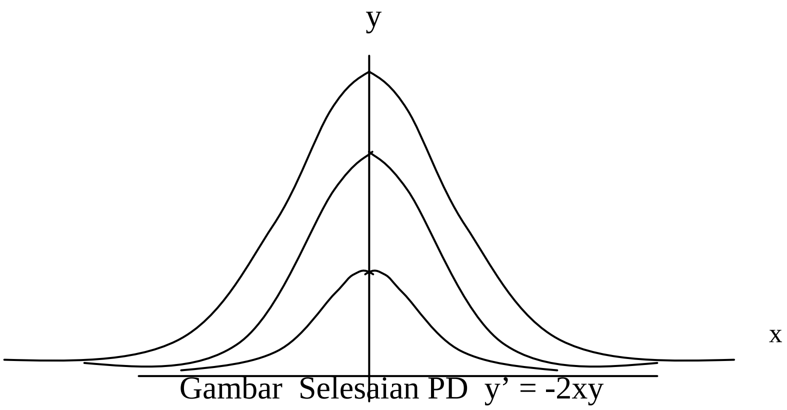
$$y = ce^{-x^2}.$$

Selesaian ini menyatakan keluarga kurva berbentuk lonceng. Untuk kasus

$$c = 0,$$

diperoleh selesaian

$$y \equiv 0.$$



Gambar Selesaian PD $y' = -2xy$

2.2 Reduksi ke Bentuk Terpisah

Ada beberapa PD orde satu yang tidak terpisah, tetapi dengan *melakukan perubahan variabel*, kita bisa mengubahnya menjadi PD terpisah. Ini berlaku untuk persamaan yang berbentuk

(5) $$y' = g(y/x),$$

di mana g suatu fungsi (y/x) yang diketahui, seperti

$$(y/x)^3,$$

$$\sin(y/x)$$

dan sebagainya.

Bentuk persamaan ini menyarankan kepada kita untuk mengambil substitusi

$$y/x = u,$$

dengan tetap mengingat bahwa y dan u merupakan fungsi dari x.

Jadi

$$y = ux.$$

Dengan penurunan diperoleh

(6) $$y' = u + u'x.$$

Dengan memasukkan (6) dalam persamaan (5) dan mengingat bahwa

$$g(y/x) = g(u)$$

diperoleh

$$u + u'x = g(u).$$

Sekarang kita bisa melakukan pemisahan variabel u dan x dan diperoleh

$$\frac{du}{g(u)-u}=\frac{dx}{x}.$$

Jika diintegralkan dan kemudian disubstitusikan kembali u dengan y/x akan diperoleh selesaian (5).

Contoh 4

Selesaikan PD:

$$2xyy' - y^2 + x^2 = 0.$$

Penyelesaian:

Pembagian dengan x^2, menghasilkan

$$2\frac{y}{x}y'-\left(\frac{y}{x}\right)^2+1=0.$$

Jika diambil

$$u = y/x,$$

dengan (6) persamaan menjadi

$$2u(u + u'x) - u^2 + 1 = 0 \quad \text{atau}$$

$$2xuu' + u^2 + 1 = 0.$$

Dengan pemisahan variabel akan diperoleh

$$\frac{2udu}{1+u^2}=-\frac{dx}{x}.$$

Jika diintegralkan diperoleh

$$\ln(1 + u^2) = -\ln|x| + c^* \quad \text{atau}$$

$$1 + u^2 = c/x.$$

Dengan mengganti kembali u dengan y/x, diperoleh

$$x^2 + y^2 = cx \quad \text{atau}$$

$$(x - c/2)^2 + y^2 = c^2/4.$$

Contoh 5

Selesaikan PD:

$$(2x - 4y + 5)y' + x - 2y + 3 = 0.$$

Penyelesaian.

Ambil

$$x - 2y = v,$$

maka

$$y' = ½(1 - v')$$

dan persamaan menjadi

$$(2v + 5)v' = 4v + 11.$$

Dengan pemisahan variabel dan pengintegralan diperoleh

$$\left(1 - \frac{1}{4v + 11}\right)dv = 2dx \text{ dan}$$

$$v - \frac{1}{4}\ln|4v + 11| = 2x + c_1.$$

Karena

$$v = x - 2y,$$

kita bisa menuliskan

$$4x + 8y + \ln|4x - 8y + 11| + c = 0.$$

Latihan 2.

Selesaikan:

1. $xy' = x + y$

2. $x^2y' = x^2 – xy + y^2$

3. $xy' = y + x^2\sec(y/x)$

4. $xy' = y + x^5e^x/4y^3$.

Gunakan Transformasi yang diberikan dan selesaikan PD-nya:

5. $xy' = e^{-xy} - y$ $(xy = v)$

6. $y' = (y-x)^2$ $\qquad$ (y-x = v)

7. $y' = \dfrac{y-x+1}{y-x+5}$ $\qquad$ (y-x = v).

Kunci Jawaban Latihan 2.2

1. $y = x(\ln x + C)$

2. $y = x - \dfrac{x}{\ln x + C}$

3. $y = x(\arcsin x + C)$

5. $y = \dfrac{\ln x - C}{x}$

7. $\dfrac{1}{2}(y-x)^2 + 5(y-x) - 6x + C = 0$

2.3 Persamaan Diferensial Eksak

Suatu PD orde satu yang berbentuk

(7) $\qquad M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

disebut *PD eksak* jika ruas kirinya adalah diferensial total atau diferensial eksak

(8) $$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

dari suatu fungsi u(x,y). Maka PD (7) dapat ditulis dengan

$$du = 0.$$

Dengan pengintegralan akan diperoleh selesaian umum dari (1) yang berbentuk

(9) $\qquad u(x,y) = c.$

Dengan membandingkan (7) dan (8) kita mengetahui bahwa (7) adalah PD eksak jika ada suatu fungsi u(x,y) sedemikian hingga

(10) $\qquad$ (a) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = M$

(b) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = N.$

Misal M dan N terdefinisikan dan mempunyai turunan parsial pertama yang kontinu dalam suatu daerah di bidang xy yang batas-batasnya berupa kurva tutup yang tidak mempunyai irisan mandiri (*self-intersections*). Maka dari (10) diperoleh

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x},$$
$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.$$

Dengan asumsi kontinuitas, maka dua turunan kedua di atas adalah sama. Jadi

(11) $$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Syarat ini bukan hanya perlu tetapi juga cukup untuk Mdx+Ndy menjadi diferensial total.

Jika (7) eksak, maka fungsi u(x,y) dapat ditemukan dengan perkiraan atau dengan cara sistematis seperti berikut. Dari (10a) dengan pengintegralan terhadap x diperoleh

(12) $$u = \int M dx + k(y);$$

dalam pengintegralan ini, y dipandang sebagai suatu konstan, dan k(y) berperan sebagai konstan integrasi. Untuk menentukan k(y), kita turunkan $\partial u/\partial y$ dari (12), gunakan (10b) untuk mendapatkan dk/dy, dan integralkan.

Rumus (12) diperoleh dari (10a). Secara sama kita bisa menggunakan rumus (10b) untuk mendapatkan rumus (12*) yang mirip dengan (12) yaitu

(12*) $$u = \int N dy + l(x).$$

Untuk menentukan *l(x)* kita turunkan $\partial u/\partial x$ dari (12*), gunakan (10a) untuk mendapatkan *dl/dx*, dan intergralkan.

Contoh 6

Selesaikan

$$xy' + y + 4 = 0.$$

Penyelesaian.

Persamaan di atas ditulis dalam bentuk (7), yaitu

$$(y+4)dx + xdy = 0.$$

Kita lihat bahwa

$$M = y+4, \qquad \text{dan}$$

$$N = x.$$

Jadi (11) dipenuhi, sehingga persamaannya adalah eksak.

Dari (12*) diperoleh

$$u = \int N dy + l(x).$$

$$= \int x dy + l(x).$$

$$= xy+l(x).$$

Untuk menentukan *l(x)*, rumus di atas diturunkan terhadap x dan gunakan rumus (10a) untuk mendapatkan

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y + \frac{dl}{dx}$$
$$= M$$
$$= y + 4.$$

Jadi

$$dl/dx = 4, \quad \text{atau}$$

$$l = 4x+c^*.$$

Jadi selesaian umum PD berbentuk

$$u = xy+l(x)$$

$$= xy+4x+c^*$$

$$= \text{konstan}.$$

Pembagian dengan x menghasilkan

$$y = c/x+4.$$

Catatan:

Persamaan di atas bisa ditulis menjadi

$$ydx + xdy = -4dx.$$

Ruas kiri adalah diferensial total dari xy, yaitu d(xy), sehingga jika diintegralkan akan diperoleh xy = -4x+c, yang sama dengan penyelesaian dengan menggunakan metode sistematis.

Contoh 7

Selesaikan PD:

$$2x\sin 3y\,dx + (3x^2\cos 3y+2y)dy = 0.$$

Penyelesaian.

Dengan (11) terbukti bahwa PDnya eksak.

Dari (12) diperoleh

$$u = \int 2x\sin 3y\,dx+k(y)$$

$$= x^2\sin 3y+k(y).$$

Jika diturunkan terhadap y diperoleh

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2\cos 3y + \frac{dk}{dy}$$

$$= 3x^2\cos 3y + 2y.$$

Jadi

$$\frac{dk}{dy} = 2y,$$

$$k = y^2 + c^*.$$

Selesaian umumnya adalah u = konstan atau

$$x^2\sin 3y + y^2 = c.$$

Perhatikan!

Metode kita memberikan selesaian dalam bentuk implisit

$$u(x,y) = c = \text{konstan},$$

bukan dalam bentuk eksplisit y = f(x).

Untuk mengeceknya, kita turunkan u(x,y) = c secara implisit. Dan dilihat apakah akan menghasilkan

$$dy/dx = -M/N \text{ atau}$$

$$Mdx + Ndy = 0,$$

seperti persamaan semula atau tidak.

Contoh 8. Kasus tidak eksak

Perhatikan PD

$$ydx-xdy=0.$$

Terlihat bahwa

$$M=y \text{ dan } N=-x$$

sehingga

$$\partial M/\partial y = 1$$

tetapi

$$\partial N/\partial x=-1.$$

Jadi PDnya tidak eksak. Dalam kasus demikian metode kita tidak berlaku: dari (12),

$$u = \int Mdx+k(y)$$

$$= xy+k(y),$$

sehingga

$$\partial u/\partial y = x+k'(y).$$

Ini harus sama dengan

$$N=-x.$$

Hal ini tidak mungkin, karena k(y) hanya fungsi dari y saja. Jika digunakan (12*) juga akan menghasilkan hal yang sama. Untuk menyelesaikan PD tak eksak yang demikian ini diperlukan metode yang lain.

Jika suatu PD itu eksak, maka kita bisa mengubah menjadi tak eksak dengan membagi dengan suatu fungsi tertentu. Sebagai contoh,

$$xdx+ydy=0$$

adalah PD eksak, tetapi dengan membagi dengan y akan diperoleh PD tak eksak

$$x/ydx+dy=0.$$

Demikian juga suatu PD tak eksak, mungkin bisa diubah menjadi eksak dengan dibagi/dikalikan dengan suatu fungsi tertentu (yang cocok). Metode ini akan dibahas dalam pasal berikutnya.

Latihan 2.3

Tunjukkan bahwa PD berikut eksak dan tentukan selesaian umumnya

1. $(x+2y)dx + (y^2+2x)dy = 0$
2. $2y(x-y)dx + x(x-4y)dy = 0$
3. $(x\sin y-y^2)dy - \cos y\, dx = 0$
4. $(3+y+2y^2\sin^2 x)dx - (y\sin 2x-2xy-x)dy = 0$
5. $x\cos(xy)dy + (2x+y\cos(xy))dx = 0$
6. $(xe^y-e^{2y})dy + (e^y-x)dx = 0$
7. $(x\cos y-x^2)dy + (\sin x-2xy+x^2)dx = 0$.

2.4 Faktor Integral

Persamaan Differensial:

$$y^{-1}dx+2xdy = 0$$

adalah tak eksak, tetapi jika dikalikan dengan

$$F(x,y) = y/x,$$

diperoleh PD eksak:

$$x^{-1}dx+2ydy = 0,$$

yang jika diselesaikan dengan metode kita, diperoleh

$$\ln|x|+y^2 = c.$$

Hal ini mengilustrasikan bahwa kadang-kadang suatu PD berbentuk

(13) $P(x,y)dx+Q(x,y)dy = 0,$

adalah tidak eksak, tetapi bisa dibuat eksak dengan mengalikan dengan fungsi (yang cocok) yang berbentuk

$$F(x,y)\ (\equiv 0).$$

Fungsi ini disebut *faktor integrasi* dari (13). Berdasarkan pengalaman, faktor integrasi bisa diperoleh dengan melakukan pemeriksaan. Untuk ini perlu diingat beberapa diferensial seperti dalam contoh 9 berikut. Dalam kasus-kasus khusus yang penting, faktor integrasi dapat ditentukan dengan cara yang sistematis, sebagaimana kita lihat berikut ini.

Contoh 9

Selesaikan:

$$xdy\text{-}ydx = 0.$$

Penyelesaian.

PD di atas adalah bukan PD eksak. Suatu faktor integrasi yang cocok adalah $F = 1/x^2$, sehingga diperoleh

$$F(x)(xdy\text{-}ydx) = \frac{xdy - ydx}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right) = 0, \qquad y = cx.$$

Contoh 10

Tentukan faktor-faktor integrasi yang lain dari PD pada contoh 9.

Penyelesaian.

Karena

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2},$$

$$d\left(\ln\frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{xy},$$

$$d\left(\arctan\frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2},$$

maka fungsi-fungsi

$$1/y^2,$$

$$1/xy, \text{ dan}$$

$$1/(x^2+y^2)$$

adalah faktor-faktor integrasi dari PD di atas. Penyelesaian yang bersesuaian dengan faktor-faktor integral itu berturut-turut adalah:

$$x/y=c,$$

$$\ln(y/x)=c, \text{ dan}$$

$$\arctan(y/x)=c.$$

Ketiga penyelesaian di atas secara esensial adalah sama karena masing-masing menyatakan keluarga garis lurus yang melalui titik asal.

Contoh di atas mengilustrasikan bahwa, jika kita mempunyai satu faktor integral F dari PD (9), kita selalu dapat memperoleh faktor-faktor integral yang lainnya. Karena

$$FPdx+FQdy$$

adalah diferensial du untuk suatu fungsi u, dan untuk sebarang H(u), diferensial yang lain adalah

$$H(FPdx+Fqdy) = H(u)du.$$

Ini menunjukkan bahwa

$$H(u)F(x,y)$$

adalah faktor integrasi yang lain dari (9).

Jika F(x,y) faktor integrasi dari (9), maka

$$FPdx+FQdy = 0$$

Adalah suatu PD eksak. Jadi syarat keeksakan

$$\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$$

menjadi

$$\frac{\partial}{\partial y}(FP) = \frac{\partial}{\partial x}(FQ). \tag{14}$$

Hal ini lebih komplek daripada jika persamaan (13) diselesaikan sehingga kurang praktis. Tetapi kita akan mengamati suatu faktor integral yang hanya bergantung pada satu variabel, katakan x. Jadi (14) menjadi

$$F\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{dF}{dx}Q + F\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Dengan membagi dengan FQ dan pengurutan kembali, diperoleh

$$\frac{1}{F}\frac{dF}{dx} = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right). \tag{15}$$

Ini membuktikan:

Teorema 1 (Faktor integrasi hanya bergantung pada satu variabel)

(a). Jika (13) sedemikian hingga ruas kanan dari (15) hanya bergantung pada x, maka (13) mempunyai suatu faktor integrasi F(x), yang diperoleh dengan menyelesaikan (15).

(b). Jika (13) sedemikian hingga $(\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y)/P$ *hanya bergantung pada y, maka (13) mempunyai suatu faktor integrasi F(y), yang diperoleh dengan menyelesaikan*

$$\frac{1}{F}\frac{dF}{dy} = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Contoh 11. Faktor integral F(x)

Selesaikan

(16) $(4x+3y^2)dx + 2xydy = 0.$

Penyelesaian.

$$P = 4x+3y^2,$$

maka

$$\partial P/\partial y = 6y.$$

$$Q = 2xy,$$

maka

$$\partial Q/\partial x = 2y.$$

Karena

$$\partial P/\partial y \neq \partial Q/\partial x$$

maka bukan PD eksak. Ruas kanan dari (3) adalah

$$(6y-2x)/(2xy) = 2/x,$$

yang hanya fungsi dari x saja, sehingga (16) mempunyai suatu faktor integrasi F(x). Dengan (15),

$$\frac{1}{F}\frac{dF}{dx} = \frac{2}{x},$$
$$\ln|F| = 2\ln|x|,$$
$$F(x) = x^2.$$

Kalikan (16) dengan x^2, diperoleh PD eksak

$$4x^3dx+(3x^2y^2dx+2x^3ydy) = 0.$$

Selesaian PD eksak ini adalah

$$x^4+x^3y^2 = c.$$

Penerapan yang terpenting dalam metode faktor integral adalah dalam penyelesaian PD linier, yaitu PD yang berbentuk

$$y' + p(x)y = r(x).$$

Latihan 2.4

Tunjukkan bahwa fungsi yang diberikan adalah suatu faktor integrasi dan selesaikan PD nya:

1. $2ydx+xdy = 0$, x

2. $\sin y dx+\cos y dy=0$, $1/x^2$

3. $y^2dx+(1+xy)dy=0$, e^{xy}

Tentukan suatu faktor integral yang sesuai dan selesaikan PD-nya:

4. $2dx-e^{y-x}dy = 0$

5. $(y+1)dx-(x+1)dy = 0$

Gunakan Teorema 1 dan selesaikan PD-nya

6. $\cos x dx+\sin x dy = 0$

7. $(3xe^y+2y)dx+(x^2e^y+x)dy = 0$.

Kunci Jawaban Latihan 2.4

4. Faktor integral: $f(x) = e^x$,

Selesaian : $2e^x-e^y=C$

5. Faktor integral: $f(x) = (1+x)^{-2}$

   Selesaian: $C(x+1)-y=0$

7. Faktor integral: $f(x) = x$

   Selesaian: $x^3 e^y+x^2y=C$

2.5 PD Linier orde satu

PD orde satu dikatakan linier jika dapat ditulis dalam bentuk

(17) $y' + p(x)y = r(x)$,

dimana p dan r fungsi-fungsi x yang kontinu pada suatu interval.

Jika $r(x) \equiv 0$, maka disebut PD linier homogen, jika tidak demikian maka disebut nonhomogen. Selesaian untuk PD homogen

(18) $y' + p(x)y = 0$,

mudah dicari dengan pemisahan variabel:

$$dy/y = -p(x)dx \quad \text{sehingga}$$

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + c^*$$

atau

(19) $y(x) = ce^{-\int p(x)dx}$

$$(c = \pm e^{c^*} \text{ jika } y \geq 0);$$

disini kita bisa memilih c=0 yang bersesuaian dengan selesaian $y \equiv 0$.

Untuk selesaian PD nonhomogen (17), kita bisa menuliskan dalam bentuk

$$(py-r)dx+dy = 0.$$

Ini berbentuk

$$Pdx+Qdy = 0, \text{ dimana}$$

$$P=py-r \text{ dan } Q=1.$$

Jadi (19) tinggal menjadi

$$\frac{1}{F}\frac{dF}{dx} = p(x).$$

Teorema 1 mengakibatkan bahwa faktor integral F(x) hanya bergantung pada x. Dengan pemisahan variabel dan pengintegralan diperoleh:

$$dF/F = pdx,$$

$$\ln|F| = \int p(x)dx.$$

Jadi

$$F(x) = e^{h(x)} \quad \text{dimana}$$

$$h(x) = \int p(x)dx.$$

Dari sini,

$$h' = p.$$

Jadi (17) dikalikan dengan $F = e^h$ dapat ditulis

$$e^h (y'+h'y) = e^h r.$$

Tetapi dengan dalil rantai :

$$(e^h y)' = e^h y' + e^h h' y,$$

sehingga

$$(e^h y)' = e^h r.$$

Dengan pengintegralan, diperoleh

$$e^h y = \int e^h r dx + c.$$

Jika kedua rusuk dibagi dengan e^h, diperoleh:

(20) $$y(x) = e^{-h}[\int e^h r dx + c],$$

$$h = \int p(x)dx.$$

Ini menyatakan selesaian umum dari (17) dalam bentuk suatu integral.

Contoh 12

Selesaikan PD linier

$$y'-y = e^{2x}.$$

Penyelesaian.

Di sini

$$P = -1, \quad r = e^{2x}, \qquad h = \int p dx = -x$$

Dan dari (20) diperoleh selesaian umum

$$y(x) = e^x[\int e^{-x} e^{2x} dx + c]$$

$$= e^x[e^x + c]$$

$$= ce^x + e^{2x}.$$

Cara yang lain, kita kalikan persamaannya dengan $e^h = e^{-x}$, sehingga diperoleh

$$(y'-y)e^{-x} = (ye^{-x})'$$

$$= e^{2x}e^{-x}$$

$$= e^{x}$$

integralkan kedua ruas untuk mendapatkan selesaian yang sama dengan yang di atas:

$$ye^{-x} = e^{x}+c, \quad \text{sehingga}$$

$$y = e^{2x}+ce^{x}.$$

Contoh 13

Selesaikan

$$xy'+y+4 = 0.$$

Penyelesaian.

Persamaan ditulis dalam bentuk (17):

$$y'+(1/x)y = -4/x.$$

Jadi

$$p = 1/x, \qquad r = -4/x,$$

sehingga

$$h = \int p\,dx$$

$$= \ln|x|,$$

$$e^{h} = x,$$

$$e^{-h} = 1/x.$$

Dari sini, dengan (20) diperoleh selesaian umum:

$$y(x) = 1/x[\int x(-4/x)dx+c]$$

$$= c/x-4,$$

Cocok dengan contoh 12.

Latihan 5

Selesaikan PD linier orde satu

1. $y'+(2x-1)y = xy^2+(x-1)$

2. $y' + (2x^4 - 1/x)y = x^3y^2 + x^5$
3. $y' - 2y/x = -y^2/x + x^2$
4. $y' + (2 - 1/x)y = y^2 - 2/x$
5. $y' + 2y + y^2 = 0$.