BAB I

PENDAHULUAN

Kompetensi

Mahasiswa diharapkan

1. Memiliki kesadaran tentang manfaat yang diperoleh dalam mempelajari materi kuliah persamaan diferensial.
2. Memahami konsep-konsep penting dalam persamaan differensial
3. Memberikan contoh-contoh penerapan persamaan diferensial dalam berbagai bidang ilmu.

Materi

1. Konsep Dasar
2. PD Biasa dan Orde PD
3. Selesaian PD
4. Penerapan Persamaan Differensial

BAB I

PENDAHULUAN

Persamaan Differensial (PD) merupakan cabang dari matematika yang sudah berkembang sejak jaman Isaac Newton dan Leibnitz dan hingga saat ini memiliki peran yang besar serta banyak diterapkan pada berbagaibidang ilmu seperti fisika, teknik, biologi, kimia, ekologi, ekonomi dan ilmu-ilmu lainnya. Persamaan differensial digunakan untuk menyatakan hubungan yang kompleks antara satu variabel tak bebas dengan satu atau beberapa variabel bebas lainnya. Melalui penggunaan simbol-simbol dalam persamaan differensial ini, hubungan antar variabel yang sebelumnya masih kurang jelas akan menjadi semakin mudah dipahami. Dengan demikian penggunaan persamaan differensial untuk menyusun suatu model tentang fenomena dari suatu sistem yang ada di dunia nyata merupakan suatu cara yang sering ditempuh guna membantu mencari solusi dari permasalahan yang ada. Pesatnya perkembangan teknologi komputer juga membantu dalam menemukan penyelesaian persamaan differensial secara numeris, terutama bentuk-bentuk persamaan differensial nonlinear dan parsial yang biasanya tidak dapat diselesaikan secara analitis.

Dalam buku ini hanya akan dibahas tentang persamaan differensial biasa, yakni persamaan differensial yang hanya melibatkan satu variabel bebas saja. Pembicaraan juga dibatasi pada penggunaan metode-metode dasar untuk menentukan selesaian analitis dari persamaan-persamaan differensial linier. Untuk mempelajari materi ini cukup didasari dengan pemahaman tentang kalkulus differensial dan integral yang biasanya telah dipelajari pada tahun pertama di perguruan tinggi. Konsep-konsep tentang turunan dan integral dari fungsi satu variabel harus dipahami secara benar karena ke dua hal tersebut menjadi salah satu alat yang digunakan untuk menentukan selesaian analitis dari suatu persamaan differensial. Selain itu, pemahaman tentang perilaku suatu fungsi dapat membantu kita memahami sifat-sifat kualitatif dari suatu fenomena yang dimodelkan dalam bentuk persamaan differensial.

1.1 Konsep Dasar

Definisi 1: *Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang memuat turunan-turunan dari suatu fungsi yang tidak diketahui, yang kita sebut dengan y(x).*

Dalam menyelesaikan PD, kita berusaha *menemukan fungsi yang tidak diketahui* itu dengan menggunakan metode-metode tertentu. Pada kasus yang paling sederhana, biasanya penyelesaian itu bisa ditentukan dengan menggunakan kalkulus sederhana.

Contoh 1:

Jika suatu populasi dari organisme tertentu mengalami pertumbuhan dengan laju $y' = dy/dx$ (x = waktu) yang sama dengan besarnya populasi pada saat itu, yaitu $y(x)$, maka model populasi itu adalah

$$y' = y,$$

yang merupakan suatu contoh paling sederhana dari PD.

Dari pelajaran kalkulus kita mengenal bahwa fungsi eksponensial

$$y = e^x \quad \text{(atau lebih umumnya } y = ce^x\text{)}$$

mempunyai sifat

$$y' = y.$$

Dengan demikian fungsi

$$y(x) = e^x \quad \text{(atau lebih umumnya } y = ce^x\text{)}$$

merupakan *suatu* selesaian dari model populasi tersebut.

Contoh 2:

Dalam fisika, jika suatu benda dijatuhkan dari ketinggian tertentu di atas permukaan bumi, maka percepatannya, yaitu

$$y'' = d^2y/dx^2,$$

sama dengan percepatan gravitasi g (konstan).

Jadi model dari benda yang jatuh bebas adalah

$$y'' = g$$

(di sini dianggap bahwa gesekan udara tidak berpengaruh).

Dengan pengintegralan akan diperoleh kecepatan

$$y' = dy/dx = gx + v_0,$$

di mana v_0 menyatakan kecepatan awal.

Dengan pengintegralan sekali lagi akan diperoleh jarak yang ditempuh oleh benda yaitu

$$y = ½gx^2+v_0x+y_0,$$

di mana y_0 menyatakan jarak awal dari titik 0.

1.2 PD Biasa dan Orde PD

Definisi 2: *suatu PD yang hanya melibatkan satu atau beberapa turunan dari suatu fungsi tak tentu y terhadap x dan mungkin fungsi y sendiri, fungsi tertentu dari x, dan konstan-konstan disebut PD biasa.*

Contoh 3:

(i) $y' = \cos x$,

(ii) $y'' + 4y = 0$,

(iii) $x^2y'''y'+2e^xy''= (x^2+2)y^2$.

Istilah PD "biasa" dipakai untuk membedakan dengan *PD parsial* yang melibatkan turunan-turunan parsial dari suatu fungsi tak tentu dengan dua atau lebih variabel bebas.

Sebagai contoh,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

adalah suatu PD parsial karena melibatkan dua buah variabel bebas, yakni x dan y.

Definisi 3: *suatu PD dikatakan berorde (tingkat) n jika n merupakan turunan tertinggi dari turunan y terhadap x dalam persamaan tersebut.*

Dalam contoh-contoh di atas:

(i) berorde 1,

(ii) berorde 2,

dan (iii) berorde 3.

1.3 Selesaian PD

Definisi 4: *Suatu fungsi y = g(x) disebut suatu selesaian dari PD orde satu yang diketahui pada suatu interval, katakan a < x < b (a dan b boleh tak hingga), jika g(x) terdefinisikan dan terdiferensialkan di seluruh interval itu dan persamaan menjadi suatu identitas jika y dan y' berturut-turut diganti dengan g dan g'.*

Dalam PD, tugas kita adalah mencari (menentukan) selesaian suatu PD yang diberikan dan memeriksa sifat-sifatnya.

Contoh 4:

Periksalah bahwa

$$y = g(x) = x^2$$

adalah suatu selesaian PD orde satu

$$xy' = 2y, \text{ untuk semua } x.$$

Penyelesaian.

Untuk memeriksa hal ini, g diturunkan dan diperoleh

$$g' = 2x.$$

Selanjutnya g dan g' dimasukkan dalam persamaan dan diperoleh suatu identitas

$$x(2x) = 2x^2,$$

yang berlaku untuk semua x.

Seringkali suatu selesaian PD muncul dalam bentuk fungsi implisit

$$G(x,y) = 0.$$

Contoh 5:

Fungsi y terhadap x yang secara implisit diberikan oleh

$$x^2+y^2-1 = 0 \quad (y > 0),$$

adalah suatu selesaian implisit PD:

$$yy' = -x$$

pada interval $-1 < x < 1$.

Untuk menunjukkan hal ini bisa dilakukan dengan menurunkan fungi implisit di atas dan memasukkannya dalam persamaan untuk memperoleh suatu identitas.

Contoh 6:

Selesaikan PD

$$y' = \cos x.$$

Penyelesaian.

Jika soal di atas kita selesaikan, maka akan diperoleh bahwa fungsi-fungsi

$$y = \sin x,$$

$$y = \sin x + 1,$$

$$y = \sin x + 1{,}5, \qquad \text{dan seterusnya,}$$

semuanya merupakan selesaian dari PD. Ini menunjukkan bahwa suatu PD orde satu bisa (dan umumnya akan) *mempunyai selesaian lebih dari satu*. Dalam contoh di atas, semua fungsi berbentuk

$$y = \sin x + C, \quad (C \text{ konstan sebarang})$$

merupakan selesaian dari PD di atas.

Di sini, fungsi

$$y = \sin x + C,$$

yang memuat konstan sebarang C, disebut *selesaian umum*, sementara itu fungsi-fungsi

$$y = \sin x,$$

$$y = \sin x + 1, \text{ dan seterusnya,}$$

masing-masing disebut *selesaian khusus* dari PD itu.

Contoh 7

Kita bisa memeriksa bahwa fungsi

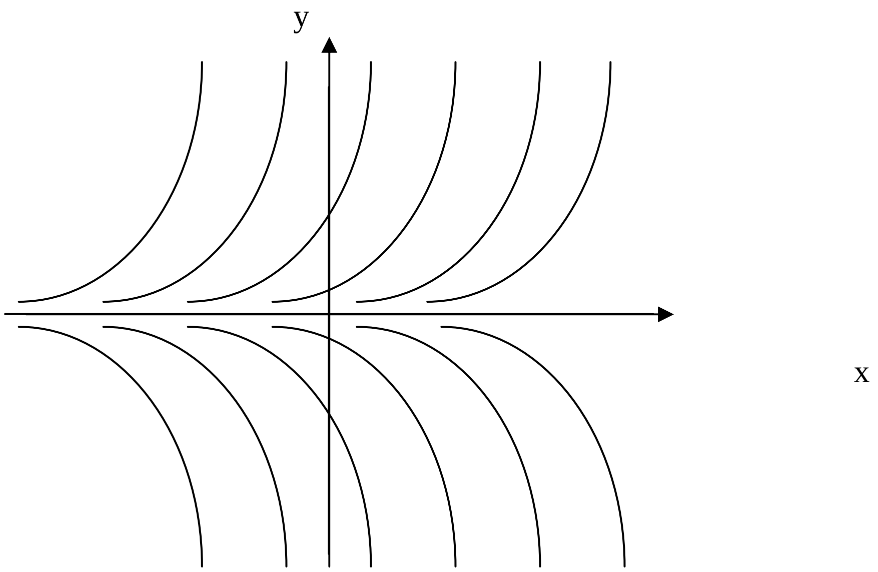
$$y = ce^x \qquad (c \text{ konstan})$$

memenuhi PD

$$y' = y,$$

untuk semua x. Karena fungsi itu memuat konstant sebarang c, maka y merupakan *suatu selesaian umum* dari PD.

Fungsi tersebut merupakan keluarga kurva seperti berikut:



Sementara itu, *selesaian khusus* bisa diperoleh dengan memilih nilai c tertentu, misal

$$y = e^x,$$

$$y = 2e^x, \text{ dan}$$

$$y = -1/2e^x, \text{ dan seterusnya}$$

yang masing-masing dinyatakan oleh sebuah kurva.

Dalam beberapa hal, mungkin ada selesaian dari suatu persamaan yang tidak dapat diperoleh dengan memberikan nilai tertentu untuk konstannya dalam selesaian umumnya, sebagai contoh PD

$$y'^2 - xy' + y = 0$$

mempunyai selesaian umum

$$y = cx - c^2,$$

yang menyatakan keluarga garis-garis lurus, dimana masing-masing garis lurus bersesuaian dengan nilai konstan c tertentu. Dengan substitusi kita juga bisa menunjukkan bahwa

$$y = x^2/4$$

juga merupakan selesaian dari PD

$$y'^2 - xy' + y = 0.$$

Fungsi

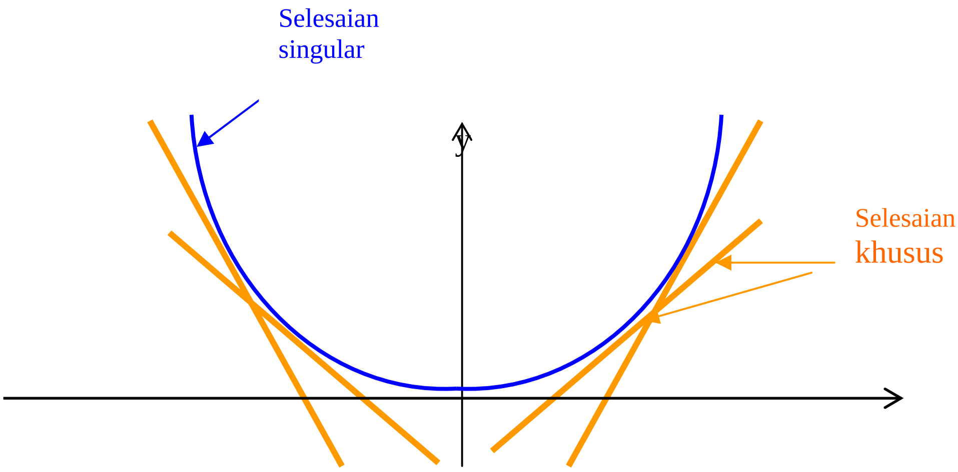
$$y = x^2/4$$

disebut *selesaian singular* dari

$$y'^2 - xy' + y = 0,$$

karena kita tidak dapat memperolehnya dengan cara memasukkan konstan tertentu ke dalam selesaian umumnya.

Kita bisa memeriksa bahwa masing-masing selesaian khusus merupakan garis singgung dari parabola yang dinyatakan oleh selesaian singular (lihat gambar di bawah).



Gambar selesaian khusus dan selesaian singular PD $y'^2 - xy' + y = 0$.

Dalam praktek, selesaian singular jarang terjadi dalam masalah-masalah teknik. Nanti kita akan melihat bahwa PD linier tidak mempunyai selesaian singular.

Perlu dicatat juga bahwa tidak semua PD mempunyai selesaian. Sebagai contoh PD:

$$y'^2 = -1$$

tidak mempunyai selesaian real.

PD:

$$|y'| + |y| = 0$$

tidak mempunyai selesaian umum, sebab satu-satunya selesaian adalah

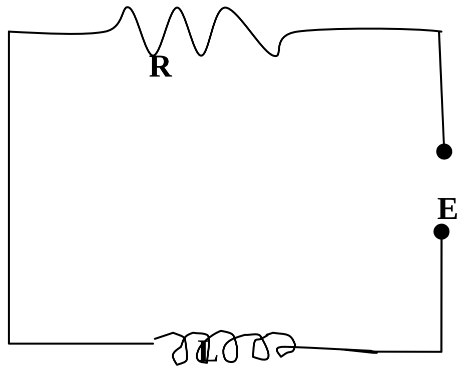
$$y \equiv 0.$$

1.4 Penerapan Persamaan Differensial

Beberapa contoh penerapan persamaan differensial yang lain dapat kita jumpai dalam pemodelan dari berbagai permasalahan nyata antara lain:

Rangkaian RL

Suatu rangkaian listrik sederhana yang terdiri dari rangkaian seri tahanan (resistor) dan induktor yang diberikan gaya gerak listrik:



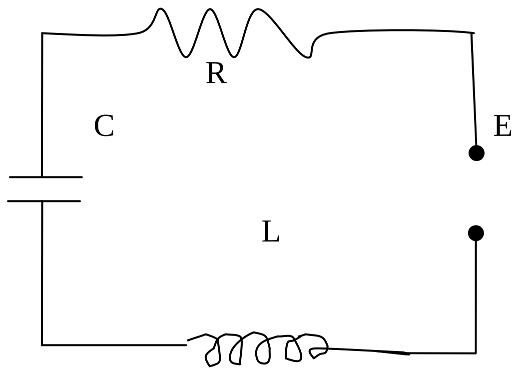
Gambar Rangkaian RL

Besar arus I yang mengalir dalam rangkaian RL diberikan oleh selesaian persamaan differensial :

$$LI' + RI = E$$

Rangkaian RLC

Sementara itu dalam suatu rangkaian RLC seperti berikut:



Gambar Rangkaian RLC

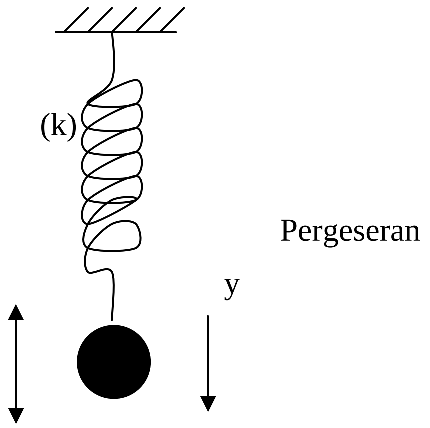
Besar arus yang mengalir dalam rangkaian tersebut diberikan oleh selesaian persamaan differensial:

$$LI'' + RI' + I/C = E'.$$

Massa bergerak pada suatu pegas

Pergeseran suatu massa m yang diletakkan pada suatu pegas dengan konstanta pegas k diberikan oleh selesaian persamaan differensial:

$$my'' + ky = 0$$

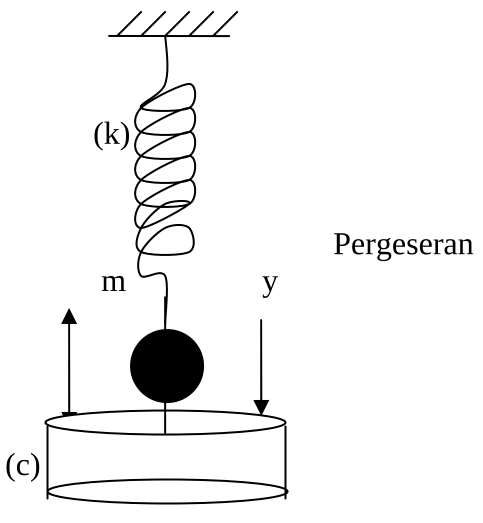


Gambar Pegas massa

Massa bergerak pada suatu pegas yang teredam

Pergeseran suatu massa m yang diletakkan pada suatu pegas dengan konstanta pegas k yang bagian bawahnya dihubungkan dengan suatu jambangan, diberikan oleh selesaian persamaan differensial:

$$my'' + cy' + ky = 0$$



Gambar Pegas massa teredam

Latihan 1

Tentukan ordenya dan periksa bahwa fungsi yang diberikan merupakan suatu selesaian

1. $y' + 8y = 0$, $y = ce^{-8x}$

2. $y'' + 16y = 0$, $y = A\cos 4x + B\sin 4x$

3. $y' - y\cos x = 0$, $y = c\sin x$

Selesaikan PD:

4. $y' = x^3$

5. $y' = \cos 3x$

6. $y'' = \sin 2x$

Buatlah PD orde satu yang mempunyai selesaian

7. $y = e^{-2x}$

8. $y = \cos x$

9. $y = x^4$

Tentukanlah nilai c sehingga selesaian umum yang diberikan merupakan selesaian khusus yang memenuhi syarat seperti yang diberikan:

10. $y' + y = 5$, $y = ce^{-x} + 5$, $y = 4$ jika $x = 0$

Kunci Jawaban Latihan 1:

1. satu

3. satu

5. $y = \frac{1}{3}\sin 3x + c$

7. $y' + 2y = 0$

9. $xy' - 4y = 0$